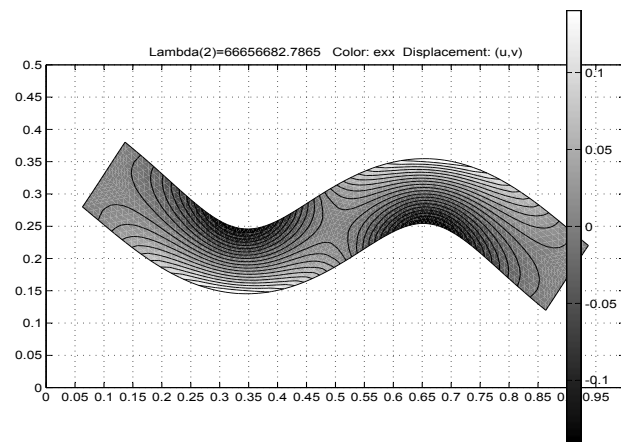


Petrophon – Elektromechanisch angeregte Eigenschwingungen in Stein- und Betonteilen

Hans Martin Sauer



Autor und Inhaber der Urheberrechte:

Dr. rer. nat. Hans Martin Sauer
Technische Universität Darmstadt
Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren
Magdalenenstraße 2
64289 Darmstadt
E-Mail: sauer@idd.tu-darmstadt.de und bastelseiten@t-online.de

Titel:

Petrophon -- Elektromechanisch angeregte Eigenschwingungen in Stein- und Betonteilen

Link zur Originaldatei:

http://www.sauerampfer-online.de/tonwerk/Petrophon_Sauer2006.pdf

Erscheinungsort und Redaktionsdatum der vorliegenden Fassung:

Darmstadt, 22. August 2018

Zusammenfassung

Der vorliegenden Bericht dokumentiert die Ergebnisse des experimentellen Projekts *Petrophon* im Jahr 2006 in Merzig/Saar. Gegenstand der Arbeiten war die Erzeugung von Klängen aus massiven Beton-, Stein oder Stahlelementen. Dies wurde durch die Installation einer elektromagnetischen Rückkopplung erreicht, bestehend aus Schwingungssensor, Verstärker und einem elektromechanischen Schwingungsgeber. Hierdurch konnten verschiedene mechanische Eigenresonanzen dieser Körper im Bereich von 10 bis 1 000 Hz angeregt und die Verteilung der Schwingungen sichtbar gemacht werden.

Ziel war die Entwicklung eines Entwurfs für ein System aus elektromechanischen Wandlern und eines elektronischen Verstärkers sowie die Definition der elektrischen und mechanischen Systemgrößen, die das Schwingungsverhalten beeinflussen.

Nach einer kurzen Einführung in die Problematik der Eigenschwingungen von Festkörpern werden die Berechnungsgrundlagen für eine magnetische Kraftübertragung von einem elektronischen Verstärker auf einen Betonquader beschrieben. Die Theorie wird in einer Reihe von praktischen Versuchen überprüft. Zudem werden die wesentlichen Systemparameter ermittelt.

Das vorliegende Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die Nutzung ist im Rahmen der Creative Commons Lizenz

CC BY-NC-SA 4.0

erlaubt. Jede kommerzielle Nutzung ist verboten. Sie dürfen dieses Werk vervielfältigen und weiterverbreiten. Sie dürfen auch Teile dieses Werks bearbeiten und weitergeben, vorausgesetzt, dass Sie den Autor als Urheber dieses Originals nennen und dass Sie Ihr daraus abgeleitetes Werk unter den gleichen Lizenzbedingungen verbreiten wie dieses Dokument.

Diese Lizenz impliziert nicht, dass die hier gemachten Angaben, Informationen oder die genannten Produktnamen und Verfahren frei sind von Rechten Dritter.

Die in diesem Bericht gemachten Angaben wurden durch den Autor sorgfältig und nach bestem Wissen geprüft. Gleichwohl können Fehler nicht vollkommen ausgeschlossen werden. Der Autor lehnt jede Haftung für jegliche Schäden ab, die sich aus der Verwendung der hier zu Verfügung gestellten Informationen ergeben könnten.

Die vorliegende PDF-Datei ist am besten lesbar, wenn sie ausgedruckt oder wenn am Bildschirm ein Zoomfaktor von 100 % oder größer eingestellt wird.

Ein Video von einigen der Experimente kann unter
https://www.youtube.com/watch?v=QRd2UM_GBKM
angesehen werden.

Weitere Informationen, Berichte und Internet-Links über einfache Experimente zu Wissenschaft und Technik finden Sie unter
www.sauerampfer-online.de

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Erste Beispiele für schwingungsfähige Steine und Betonteile . . .	7
2	Eigenschwingungen in massiven Stäben und Quadern	10
2.1	Kompressionsschwingungen	10
2.2	Biegeschwingungen	10
2.3	Torsionsschwingungen	12
2.4	Simulation von Eigenschwingungen	13
2.5	Federpendel-Modell	14
2.5.1	Bestimmungsmethoden für die Modellparameter	15
2.5.2	Übertragungsfunktion	16
3	Elektromagnetische Anregung von Eigenschwingungen	18
3.1	Energiewandler: magnetische vs. piezoelektrische Systeme . . .	18
3.2	Betriebsparameter von Energiewandlern	19
3.3	Bedingungen für die Selbsterregung von Eigenschwingungen . .	21
3.4	Funktionsweise und Berechnung von magnetischen Wandlern .	23
3.4.1	Magnetischer Wegaufnehmer	23
3.4.2	Magnetische Aktoren	25
4	Experimentelle Ergebnisse	27
4.1	Vorversuche	27
4.2	Herstellung eines Betonschwingers	28
4.3	Energiewandler	30
4.4	Ansteuer-Verstärker	32
4.5	Störeffekte	37
4.6	Berechnete und gemessene Eigenresonanzen	39
4.7	Messung der Modellparameter	41
4.7.1	Dynamische Masse	41
4.7.2	Dämpfungskonstante	43
5	Ausblick	44

1 Einführung

Nahezu alle Gegenstände, die aus fester Materie bestehen, können unter geeigneten Bedingungen zu mechanischen Eigenschwingungen angeregt werden. Form und Frequenz dieser Schwingungen hängen hierbei von Größe und Gestalt des Gegenstandes ab, sowie von den Eigenschaften des Materials wie Dichte, Elastizitäts- und Schermodul. Bei ein und demselben Gegenstand können im Allgemeinen verschiedene Schwingungsmoden angeregt werden, die sich in ihrer Frequenz unterscheiden und eine eigene, jeweils charakteristische Verteilung der Bewegungsenergie innerhalb des Gegenstandes besitzen.

Für einige geometrisch einfache und symmetrische Körper lassen sich die Schwingungsmoden leicht vorhersagen. Ein gespannter Stahldraht gegebener Länge L kann beispielsweise zu sinusförmigen Transversalschwingungen angeregt werden, wobei die Wellenlänge λ_n der einzelnen Schwingungsmoden immer ein ganzzahliger Bruchteil $1/n$ (mit $n = 1, 2, 3, \dots$) von $2L$ ist. Die Eigenfrequenzen f_n dieser Schwingungsmoden hängen hierbei von der Elastizität, vom Gewicht des Stahldrahtes pro Meter Länge und von der Kraft ab, mit der er gespannt ist. Sie sind zu ihren jeweiligen Wellenlängen λ_n umgekehrt proportional und somit proportional zu n . Insbesondere ist zu vermerken, dass die einzelnen Frequenzen in einem rationalen Verhältnis stehen.

$$f_n/f_m = n/m$$

Zwei Eigenmoden mit rationalem Frequenzverhältnis f_n zu f_m bilden für das menschliche Gehör einen harmonischen Zweiklang. Auf den Eigenmoden läßt sich eine Tonleiter aufbauen. Die transversalen Eigenmoden einer gespannten Saite sind die Grundlage vieler traditioneller Musikinstrumente wie Gitarre, Violine oder Harfe.

Indessen steht für die Mehrzahl der geometrischen Formen das Verhältnis der Eigenfrequenzen, die der betreffende Körper hat, nicht in einem harmonischen Verhältnis. Schon für eine dünne, rechteckige Platte, die an einem Punkt eingespannt ist, oder für ein elastisches Trommelfell, das an seinem Rand aufgespannt wird, ist das Spektrum der Eigenschwingungen höchst kompliziert. Erst recht trifft das auf massive, unregelmäßig geformte Körper zu, wie etwa eine Metall- oder Betonkonstruktionen.

Hier tritt zudem ein weiteres Phänomen auf, das die Anregung von Eigenresonanzen erschwert: je komplexer die Gestalt des Körpers ist, desto größer ist die Dämpfung der Eigenmoden. Dies hängt damit zusammen, dass bei gegebenem Gesamtvolumen des Körpers die Schwingungsformen komplizierter werden und in einem gegebenen Frequenzfenster zunehmend mehr Eigenschwingungen möglich sind. Hierdurch wird ein Übersprechen zwischen den

einzelnen Moden und der Abfluß von Schwingungsenergie in andere Bewegungsformen begünstigt. Die Amplitude einer Eigenschwingung klingt dann um so schneller ab, und die Eigenresonanz hat dann einen eher dumpfen Klang. Man spricht hier von einem *Resonator geringer Güte*. Diesem Effekt kann man nur dadurch entgegenwirken, dass man den Energieverlust kontinuierlich von außen ersetzt, z. B. durch elektromechanische Energiewandler. An die Energieübertragung werden hierbei bestimmte Anforderungen gestellt. So muß die zugeführte Energie nicht nur die richtige Frequenz, sondern auch die passende Phasenlage haben.

Zudem liegt es in der Natur der Sache, dass bei vielen technischen Konstruktionen besonderer Wert auf mechanische Stabilität gelegt wird. Das heißt, dass bei Einwirkung einer äußeren Kraft an einem bestimmten Punkt der Konstruktion eine möglichst geringe resultierende Verformung angestrebt wird. Das Verhältnis von erzielter Verformung und der dazu erforderlichen Kraft wird aus Sicht der Anregung von Eigenschwingungen unvorteilhaft sein. Hier müssen daher auch Wege gefunden werden, wie man an solche Körper mit *hohem Wellenwiderstand* möglichst effizient Schwingungsenergie übertragen kann. Wir werden uns ausführlich mit dieser Frage befassen und untersuchen, wie die Übertragung elektrischer Schwingungen an ein mechanisches System (und umgekehrt) quantitativ berechnet und möglichst effizient gestaltet werden kann.

Im den folgenden Abschnitten werden wir zunächst die wichtigsten Schwingungsformen beschreiben, die in einem z.B. quaderförmigen Körper vorkommen: Kompressions-, Biege- und Torsionsschwingungen. Insbesondere die Biegeschwingungen werden mittels der Euler-Bernoulli-Gleichung sowie mit einer Finite-Elemente-Simulation der strukturmechanischen Gleichungen untersucht. Zur Lösung der Aufgabenstellung, ein elektrisch erregtes, autonom schwingendes System aufzubauen, wird der Schwinger auf ein Federpendelmodell reduziert, das trotz seiner Einfachheit eine vollständige Erfassung der mechanischen Eigenschaften des Quaders hinsichtlich seiner Eigenschwingungen erlaubt.

Anschließend werden die Eigenschaften von Energiewandlern beschrieben, die zur Umwandlung von elektrischer Energie in mechanische Schwingungen geeignet sind. Auch hier werden wir auf die Vollständigkeit aller technischen Parameter Wert legen und praxisorientierte Methoden zur Berechnung der Energiewandler vorstellen. Ferner werden die Bedingungen hergeleitet, unter welchen die Kopplung von mechanischen und elektrischen Komponenten zur Anregung der Eigenschwingungen führt.

Im abschließenden Kapitel wird die Herstellung eines schwingungsfähigen Betonquaders und der Aufbau eines Ansteuerverstärkers beschrieben. In einer

Serie von Messungen werden aufbauend auf den zuvor erarbeiteten Grundlagen sämtliche Modellparameter für verschiedene Resonanzmoden des Betonquaders bestimmt.

Zur Berechnung der verwendeten elektromagnetischen Energiewandler wurde ein Tabellenkalkulations-Arbeitsblatt (MS-Excel) verfaßt, das alle wichtigen Berechnungsformeln enthält und auf einfachste Weise verwendbar macht. Diese Dateien werden auf der Homepage des Autors (sauerampfer.homepage.t-online.de) zur Verfügung gestellt.

1.1 Erste Beispiele für schwingungsfähige Steine und Betonteile

Die Idee zum Petrophon-Projekt resultierte aus der Beobachtung, dass sich in einer großen Menge von im Prinzip beliebig geformten Natursteinen oder Betonteilen, die für technische Zwecke hergestellt werden, oft eine kleine Anzahl von Objekten befinden, die ungewöhnliche, auffällige Klangeigenschaften haben. Beim Anschlagen mit einem Hammer verbleibt hier ein relativ lang anhaltender, harmonisch klingender Ton, der offenkundig auf elastischen Eigenschwingungen des betreffenden Körpers beruht. Noch auffälliger ist dieser Effekt bei manchen Metallgegenständen wie zum Beispiel Stahlträgern, die an bestimmten Punkten gelagert sind. Auch von Hohlräumen wie zum Beispiel einem Betonrohr oder einem gekachelten Badezimmer ist bekannt, dass bestimmte Tonhöhen hierin akustisch hervorgehoben sind. Auch das bekannte Rauschen, das man in der Schale einer großen Meeresmuschel hören kann, die man ans Ohr hält, beruht auf der Selektion bestimmter akustischer Eigenfrequenzen. Dies beruht darauf, dass sich bei der betreffenden Frequenz stehende Wellen des eingeschlossenen Luftvolumens bilden. Gleichwohl hat die Struktur des Eigenschwingungsspektrums von schweren, massiven Gegenständen unter dem Aspekt konstruktiver bzw. künstlerisch-architektonischer Arbeiten wie auch der Harmonielehre und Musikpädagogik einen besonderen Reiz.

Beispiele für Betonskulpturen mit spezifischen Klangeigenschaften kann man in verschiedenen Kunst- und Naturkundemuseen besichtigen. Beispielsweise wird im Naturkundemuseum *Geoskop* der Burg Thal-Lichtenberg nahe Kusel eine Reihe von Betonquadern ausgestellt, deren Eigenfrequenzen ähnlich wie bei einem Xylophon auf ein harmonisches Verhältnis abgestimmt sind. Aufgrund der erstaunlich hohen Resonanzgüte dieser Betonquader können durch Anschlagen mit einem Hammer sogar Dreiklänge und Schwebungen zu Gehör gebracht werden.

Auch bestimmte Natursteine wie etwa monolithische Kieselsteinplatten neigen beim Anschlagen trotz ihrer unregelmäßigen Gestalt bisweilen zu einen

auffällige, lange anhaltenden Ton. Dieser Ton entspricht einer Biegeschwingung, deren Amplitudenverteilung oft hochgradig unregelmäßig ist. Verantwortlich für solche Schwingungsresonanzen ist offenbar der ungewöhnlich hohe Grad an struktureller Homogenität solcher Steine. Auch Versuche mit größeren Feuerstein-Brocken, wie sie auf der Insel Rügen in natürlichen Vorkommen und in größerer Menge zu finden sind, ergaben eine auffällig große Zahl an Steinen mit hoher Resonanzgüte. Dieses Gestein zeichnet sich ebenfalls durch sehr hohe innere Homogenität, Isotropie und eine sehr feinkörnige Gefügestruktur aus. Von Feuerstein ist schließlich auch bekannt, dass er sich sehr leicht durch Anschlagen mit einem harten Gegenstand spalten läßt. Dies beruht nicht zuletzt darauf, dass sich Schallwellen in diesem Gestein sehr verlustarm ausbreiten und sich zu Schockwellen aufschaukeln können.

Für erste Versuche zur Herstellung eines schwingfähigen Betonteils mit definierter Gestalt und vorhersagbarem Resonanzspektrum wurde für Petrophon zunächst eine etwa 18 kg schwere Stimmgabel aus Beton angefertigt. Hierzu wurden zwei flache Betonquader hergestellt, die am Fußpunkt mittels Gewindestäben an einen Betonfuß befestigt wurden. Allerdings erwiesen sich die Schwingungseigenschaften nicht als zufriedenstellend. Trotz eines verhältnismäßig hohen Aufwandes bei der Herstellung der Betonverschalung war es nicht möglich, zwei Betonquader mit hinreichend gleichen Maßen herzustellen. Selbst geringe Dickenunterschiede von nur 1 mm führten dazu, dass der Schwingungsknoten der Betonstimmgabel nicht mehr wie beabsichtigt im Betonfuß lag, sondern leicht verschoben war. Infolgedessen wurde über den Fuß ein bedeutender Teil der Schwingungsenergie in die Lagerung übertragen. Zudem zeigte sich, dass die Gewindestäbe, die zur Fixierung der beiden Gabelzinken am Fuß verwendet wurden, eine zu hohe Elastizität hatten und die hier auftretenden dynamischen Kräfte als Folge der Hebelverhältnisse in Gabelzinken und Befestigung enorm groß waren.

Weitere Versuche wurden daher zunächst mit Metallstimmgabeln durchgeführt, die über elektromagnetische Aktoren und einen zwar recht einfachen, aber doch speziell angepaßten Ansteuerverstärker zu Eigenschwingungen angeregt wurden. Diese Versuche wurden mit unerwartet gutem Erfolg abgeschlossen, waren aber von eher qualitativer Natur. Immerhin konnte klar nachgewiesen werden, dass es bei der Verstärkung der elektrischen Signale aus dem Schwingungsaufnehmer weniger auf einen hohen Verstärkungsfaktor, sondern vielmehr auf eine präzise Einhaltung einer bestimmten Phasenverschiebung zwischen der *Signalspannung* aus dem Schwingungsaufnehmer und dem *Erregerstrom* im elektromechanischen Aktor ankommt. In einem zweiten Schritt wurde dann wieder ein massives Betonteil zum Untersuchungsgegenstand gemacht. Diesmal wurde jedoch statt einer Stimmgabel ein einfacher

Betonquader mit flexiblem Auflager sowie eine als Baukastensystem kompliziertere und deutlich leistungsfähigere Ansteuerung verwendet. Die Ergebnisse aus diesen Versuchen belegen eindeutig, dass mit relativ einfachen und sicher vorherberechenbaren Verfahren selbst in massiven Körpern Resonanzschwingungen von erheblicher Amplitude erzeugt werden können.

Über Eigenschwingungen in Betonteilen gibt es in der Literatur indessen bereits umfangreiche Arbeiten. In dem klassischen Artikel von R. Schmidt¹ (1934) werden unter anderem an verschiedenen langen Betonquadern mittels eines elektroakustischen Systems Messungen von Eigenresonanzen und Dämpfungswerten durchgeführt. Wie in der vorliegenden Arbeit wurden auch dort Modellparameter für das schwingende System definiert und Verfahren zu ihrer experimentellen Bestimmung gezeigt.

In dem Buch von Fletcher und Rossing² werden für geometrisch einfache Körper wie Stäbe und Platten die Gleichungen für Eigenschwingungen in sehr verständlicher Weise abgeleitet und experimentellen Ergebnissen gegenübergestellt. Dieses Buch und die darin zitierten Literaturstellen seien dem Leser zur Einarbeitung in das Thema ganz besonders empfohlen.

Sehr empfehlenswert ist ferner das Buch von Ballas, Pfeifer und Werthschützky³, in dem das Thema Eigenschwingungen und Aktorik in vielen Facetten beleuchtet wird. Hierauf werden wir später noch im Detail eingehen.

Gleichwohl stellt sich bei allen Beton- und Steinschwingern als zentrales Problem die Übertragung einer definierten Leistung an den Schwinger dar. Auch die Messung der Auslenkungsamplitude, die teilweise im Bereich von weit weniger als $1 \mu\text{m}$ liegen kann, und die Umsetzung von elektrischen in mechanische Schwingungen ist ein zentraler Gegenstand des vorliegenden Berichts. Es wird anhand von mathematischen Modellen belegt werden, dass die korrekte, phasengenaue Ansteuerung für die effiziente Anregung von Eigenschwingungen schwerer, oft stark gedämpfter Körper von größter Wichtigkeit ist. Aus diesem Grund wird hier ausführlich auf die Energiewandler und die Ansteuerelektronik eingegangen und Vor- und Nachteile von piezoelektrischen und magnetischen Wandlern gegenübergestellt.

¹R. Schmidt, *Dämpfungsmessung von Schallwellen in festen Körpern*, Archive of Applied Mechanics, ISSN 1432-0681, Vol. 5, (5, 1934), 352 - 362

²N. H. Fletcher, T. D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments*, Springer Verlag, New York 1991

³R. G. Ballas, G. Pfeifer, R. Werthschützky, *Elektromechanische Systeme in Mikrotechnik und Mechatronik*, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin und Heidelberg 2000, 2009, ISBN 978-3-540-89317-2

2 Eigenschwingungen in massiven Stäben und Quadern

Das Spektrum der Eigenschwingungen von massiven Stäben und Quadern umfaßt eine Reihe von qualitativ sehr unterschiedlichen Schwingungsmoden, die man vor allem im unteren Bereich des Frequenzspektrums in Kompressionsschwingungen, Biegeschwingungen und Torsionsschwingungen unterteilen kann. Unter einem Quader verstehen wir hierbei einen Stab bestimmter Länge a , der einen konstanten, rechtwinkligen Querschnitt besitzt. Die Kantenlängen des Querschnitts seien mit b und c bezeichnet. Bei höheren Frequenzen wird die Unterscheidung in die genannten Schwingungsformen zunehmend schwierig, da sich Mischformen bilden. Für die vorliegenden Zwecke ist die Unterscheidung dennoch sinnvoll, um die prinzipiellen Anforderungen an ein schwingendes System diskutieren zu können.

2.1 Kompressionsschwingungen

Bei den Kompressionsschwingungen handelt es sich um eine longitudinale Schwingung, bei der eine Dichtewelle in Richtung einer der Kanten durch den Quader läuft. Die Wellenlänge λ_n ist ein ganzzahliger Bruchteil der doppelten Kantenlänge $2a/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, und die Frequenz ergibt sich vermittels der Schallgeschwindigkeit c_0 des Quadermaterials zu $f_n = c_0/\lambda_n = c_0 n/2a$. Die einzelnen Resonanzfrequenzen, die zu einer bestimmten Ausbreitungsrichtung gehören, stehen wie bei der oben beschriebenen schwingenden Saite in einem harmonischen Verhältnis, wohingegen die Eigenfrequenzen, die zu unterschiedlichen Ausbreitungsrichtungen gehören, im Verhältnis der betreffenden Kantenlängen gegeneinander verstimmt sind. Da die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern im Bereich von 2000 bis 5000 m/s liegt, liegen die Grundfrequenzen für einen Quader mit einer Kantenlänge von 1 m im Bereich von 1 bis 2,5 kHz. Die Resonanzgüte dieser Schwingungsmoden läßt sich durch Verwendung einer weichen Lagerung zumeist recht hoch treiben, da der Wellenwiderstand von Materialien wie Stahl oder Beton um mehrere Größenordnungen über den Werten von Luft oder elastischen Materialien wie Gummi liegt.

2.2 Biegeschwingungen

Bei den Biegeschwingungen handelt es sich um transversale Moden, bei denen der Quader in bezug auf eine seiner Kanten in Richtung einer der beiden

anderen Kanten ausgelenkt wird. Biegeschwingungen von nennenswerter Amplitude lassen sich meist nur dann erzielen, wenn eine oder zwei der Kanten des Quaders deutlich länger sind als die verbleibenden. Man kann hier zwei Extremfälle unterscheiden, nämlich stab- und plattenförmige Schwinger.

Die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen hängen zusätzlich von der Lagerung des Quaders ab. Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass durch die Schwingung am Lager des Quaders keine oder nur geringe Kräfte und Drehmomente ausgeübt werden. Dies kann zum Beispiel dadurch erreicht werden, dass der Quader in den Schwingungsknoten der jeweiligen Biegeschwingungen gelagert wird. Betrachtet man einen Quader, dessen Dicke in Auslenkungsrichtung b sei, dann berechnen sich die Eigenfrequenzen unter der Annahme, dass $b \ll a$ ist, aus der Euler-Bernoulli-Gleichung⁴ für eine harmonische Auslenkung $z(x, t) = z(x, \omega)e^{i\omega t}$

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{E b^2}{12 \rho} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \quad (1)$$

und den Fall von kräftefreier Lagerung (d.h. mit den Randbedingungen $\partial^3 z / \partial x^3 = \partial^2 z / \partial x^2 = 0$ an den Enden des Quaders) zu

$$\tan \frac{\omega a}{2\xi} = \pm \tanh \frac{\omega a}{2\xi} \quad (2)$$

wobei

$$\xi^2 = \frac{\omega b}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3)$$

das Quadrat der Phasengeschwindigkeit der Biegewellen, E der Elastizitätsmodul sowie ρ die Massendichte sind. Die Eigenfrequenzen ergeben sich hieraus näherungsweise zu

$$f_n = \frac{\pi b}{16\sqrt{3}a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} [3, 011^2; 5^2; 7^2; \dots] \quad (4)$$

Für weitere Einzelheiten sei hier auf das zitierte Werk von Fletcher und Rossing verwiesen. Die Autoren gehen bei der Herleitung dieser Gleichung von einem einachsigen Spannungszustand im Biegeschwinger aus, was im Grenzfall eines dünnen Schwingers ($b \ll a$) auch gerechtfertigt ist. Die Schwingungsknoten der einzelnen Biegemoden befinden sich an unterschiedlichen Punkten entlang der Kante a des Quaders. Diese sind für einige Moden in Tabelle 1 angegeben. Zur Berechnungen der Eigenfrequenzen für den Fall, dass b und a

⁴B. Mingler, H. P. Karnthaler, Vorlesungsskript *Grundlagen der Elastizität, Viskoelastizität und Plastizität*, Institut für Materialphysik, Universität Wien 2009

Freq.-Verhältnis	Wellenlänge	Position der Knotenpunkte				
1	133 cm	22,4 cm	77,6 cm			
2,756	80,0 cm	13,2 cm	50,0 cm	86,8 cm		
5,404	57,2 cm	9,4 cm	35,6 cm	64,4 cm	90,6 cm	
8,933	44,5 cm	7,3 cm	27,7 cm	50,0 cm	72,3 cm	92,7 cm

Tabelle 1: Verhältnisse der Resonanzfrequenzen, Wellenlängen und Positionen der Schwingungsknoten für Biegeschwingungen an einem Quader von 100 cm Länge. Nach Fletcher und Rossing (1991).

ähnlich groß sind, eignen sich dagegen mechanische Modelle, die den zweiachsigen Spannungszustand beschreiben, der für den Biegeschwinger charakteristisch ist.

Die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen stehen nicht in einem harmonischen Verhältnis. Die Frequenzen sowie der Wellenwiderstand der Biegeschwingungen sind im Vergleich zu den Kompressionsschwingungen relativ niedrig. Die Güte einer Biegeschwingungsresonanz hängt ganz entscheidend von der Lagerung ab und ist am größten, wenn die Knotenpunkte der jeweiligen Mode als Auflager dienen.

2.3 Torsionsschwingungen

Bei Torsionsschwingungen wird der Quader um seine Achse in sich verdreht. Die Eigenresonanzen berechnen sich nach der Gleichung

$$f_n = \frac{c_T n}{2a} \quad (5)$$

wobei

$$c_T = \sqrt{\frac{G K_T}{J}} \quad (6)$$

die Torsions-Schallgeschwindigkeit des Quaders ist, J das Massenträgheitsmoment des Quaders pro Längeneinheit in bezug auf die Torsionsachse und K_T ein sog. Steifigkeitsfaktor, der von der genauen Querschnittsgeometrie abhängt. G bezeichnet den Schubmodul. Für Quader mit quadratischem Querschnitt ergibt sich eine Torsions-Schallgeschwindigkeit $c_T \approx 0,92 \sqrt{G/\rho}$. Wenn die Kanten b und c im Längenverhältnis 1:2 stehen, dann ist $c_T \approx 0,74 \sqrt{G/\rho}$.

Im Grenzfall $b \gg c$ erhält man schließlich $c_T \approx (2c/b) \sqrt{G/\rho}$. Wie bei den Kompressionsmoden stehen auch die Frequenzen der Torsionsresonanzen in einem harmonischen Verhältnis.

2.4 Simulation von Eigenschwingungen

Die Berechnung der Eigenfrequenzen der Schwingungsmoden ist insbesondere im Fall der Biegeschwingungen mit bestimmten Näherungsannahmen verbunden, die nur bei langen, dünnen Quadern gerechtfertigt sind. Von besonderem Interesse ist es aber, das genaue Verhältnis von Eigenfrequenzen verschiedener Schwingungstypen zu kennen, da erst hierdurch eine genaue Prüfung der Modellannahmen möglich ist. Aus diesem Grund wurde eine Simulation von Biege- und Kompressionsschwingungen durch numerische Lösung der strukturmechanischen Gleichungen durchgeführt. Bei dieser Simulation kam es zudem darauf an zu prüfen, inwieweit geringfügige Abweichungen des Betonschwingers von der exakten Quadergestalt die Eigenfrequenzen gegeneinander verschieben. Zudem stellt sich das Problem, dass die elastischen Moduln von realem Beton nicht hinreichend genau bekannt sind. Vielmehr sollen diese anhand der Schwingungsfrequenzen erst bestimmt werden. Wenn mehrere Sollfrequenzen durch Simulation berechnet und mit gemessenen Daten verglichen werden, dann kann die Genauigkeit der berechneten elastischen Moduln wesentlich besser eingeschätzt werden.

In einer Finite-Elemente-Simulation, die in MATLAB programmiert wurde, konnte der angenommene zweiachsige Spannungszustand durch folgendes Gleichungssystem beschrieben werden, wobei E der Elastizitätsmodul, ν die Poissonzahl und $\varepsilon_x = \partial_x u$ und $\varepsilon_y = \partial_y v$ die Dehnung in x - und y -Richtung, $\gamma_{xy} = \partial_y u + \partial_x v$ die Scherung in der xy -Ebene, u und v die Auslenkungen in x - und y -Richtung gegen die Ruhelage sowie σ_x , σ_y und τ_{xy} die Spannungen in die betreffenden Richtungen sind:⁵

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (7)$$

und außerdem

$$\begin{aligned} -\partial_x \sigma_x - \partial_y \tau_{xy} &= \rho \partial_t^2 u \\ -\partial_y \sigma_y - \partial_x \tau_{xy} &= \rho \partial_t^2 v \end{aligned}$$

⁵Die Simulation ist mit dem MATLAB-Befehl `pdetool` recht einfach über eine GUI durchführbar, da die betreffenden strukturmechanischen Gleichungen sowie die Randbedingungen in einem der Applikationsmodi bereits fest implementiert sind.

Schermodul G und der Kompressionsmodul μ lassen sich aus dem Elastizitätsmodul E sowie dem Poissonverhältnis ν wie folgt berechnen:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (8)$$

Die Ergebnisse der Simulation werden wir zusammen mit den experimentellen Befunden in Kapitel 4.6 diskutieren.

2.5 Federpendel-Modell

Um die Ankopplung einer bestimmten Schwingungsmode an einen Schwingungsgeber zu untersuchen, kann an Stelle der strukturmechanischen Gleichungen ein vereinfachtes, eindimensionales Oszillatormodell verwendet werden, das die Schwingungen durch ein mechanisches Federpendel mit gleicher Frequenz und Dämpfung beschreibt. Hierbei wird die Auslenkung $s(t)$ des Pendels bzw. des Schwingers am Ort des Schwingungsgebers als eine einfache Zeitfunktion angesehen. An diesem Punkt greift zugleich eine zeitabhängige Kraft $F(t)$ an, die das Pendel antreibt. Die zunächst noch unbekanntenen Modellparameter des Federpendels sind seine dynamische Masse m , die Federkonstante D , und die Dämpfungskonstante κ . Federkonstante und Dämpfung lassen sich am Schwinger in enger Analogie zum Federpendel definieren.

$$D = \left. \frac{\partial F}{\partial s} \right|_{v=0} \quad (9)$$

sowie

$$\kappa = \left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_{s=0} \quad (10)$$

Die dynamische Masse m des Schwingers hängt von der betreffenden Schwingungsmode ab und unterscheidet sich von seiner tatsächlichen Masse. Die dynamische Masse m berücksichtigt die Tatsache, dass die kinetische Energie bei einer Biegeschwingung nicht gleichmäßig über den schwingenden Körper verteilt, sondern in der Umgebung der Schwingungsbäuche konzentriert ist.

Wir werden später zeigen, wie κ und m auf elektrischem Wege direkt gemessen werden können. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m \ddot{s} + \kappa \dot{s} + D s = F(t) \quad (11)$$

Mit dem harmonischen Ansatz $s(t) = s_\omega e^{i\omega t}$ und $F(t) = F_\omega e^{i\omega t}$ folgt für die Auslenkungsgeschwindigkeit $v_\omega = i\omega s_\omega$:

$$v_\omega = \frac{i\omega F_\omega/m}{\frac{D}{m} - \omega^2 + i\frac{\kappa}{m}\omega}$$

$$= \frac{i\omega F_\omega/D}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i\left(\frac{\omega}{\tau_r \omega_0^2}\right)} \quad (12)$$

Hierbei ist $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ die Eigenfrequenz des Schwingers und $\tau_r = m/\kappa$ die Abklingzeit der Schwingung.

Neben den Parametern D , κ und m läßt sich der einschwingendes System natürlich auch durch die Güte Q beschreiben, diese ist für die betreffende Resonanzmode jeweils durch

$$Q = \omega_0 \tau_r = m \omega_0 \kappa^{-1} \quad (13)$$

definiert.

2.5.1 Bestimmungsmethoden für die Modellparameter

Die Messung der Eigenfrequenz ω_0 ist wie bei einem Musikinstrument durch einfaches Anschlagen des Quaders recht einfach möglich. Schon mit dem Gehör läßt sich die Eigenfrequenz oft erstaunlich genau ermitteln. Dies gilt vor allem dann, wenn man sie mit dem Ton eines korrekt gestimmten Musikinstruments vergleicht. Für quantitative Messungen empfiehlt sich hier natürlich die Verwendung eines elektrischen Aufnehmersystems und eines Oszilloskops bzw. eines Frequenzzählers. Bei stärkerer Dämpfung ist es wiederum hilfreich, durch Rückkopplung über ein elektrisches Verstärkersystem die Eigenschwingung gezielt anzuregen, so dass eine kontinuierliche Schwingung entsteht.

Die Messung der Abklingzeit τ_r ist prinzipiell ebenfalls durch Anschlagen und unter Verwendung eines elektrischen Aufnehmersystem möglich. Allerdings ist die Messgenauigkeit deutlich geringer, da beim Anschlagen in der Regel mehrere Moden gleichzeitig erregt werden. Diese klingen meistens mit verschiedenen Zeitkonstanten ab, was die Bestimmung der einzelnen Zeiten schwierig macht, andererseits aber den spezifischen Klang des angeschlagenen Quaders ausmacht.

Um die dynamische Masse m zu bestimmen, kann man eine zusätzliche Masse $m_{\text{add}} \ll m$ in Form von kleinen Gewichten an dem Punkt hinzufügen, an dem auch die äußere Kraft $F(t)$ angreift. Die sich hieraus ergebende Frequenzänderung pro hinzugefügter Masse ist der dynamischen Masse m umgekehrt proportional:

$$\frac{1}{m} = -\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \omega_{\text{res}}}{\partial m_{\text{add}}} \quad (14)$$

Die Federkonstante D kann dann über die Gleichung

$$D = m \omega_0^2 \quad (15)$$

bestimmt werden

2.5.2 Übertragungsfunktion

Betrachtet man das Verhältnis $g(\omega) = v_\omega/F_\omega$ als Funktion der Kreisfrequenz ω , dann findet man gemäß Gl. (12) einen komplexwertigen Übertragungsfaktor, den wir nach Betrag und Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ aufspalten können:

$$g(\omega) = \frac{i\omega/D}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{i\omega}{\omega_0^2\tau_r}} \quad (16)$$

$$|g(\omega)| = \frac{\omega/D}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0^2\tau_r}\right)^2}} \quad (17)$$

$$\tan \phi(\omega) = \frac{\omega_0^2\tau_r}{\omega} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \quad (18)$$

Wird der Schwinger mit der Frequenz ω_0 angeregt, dann ist das Verhältnis zwischen wirkender Kraft F_ω und Auslenkgeschwindigkeit v_ω praktisch minimal, nämlich gleich

$$g(\omega_0) = \frac{v_\omega}{F_\omega} \Big|_{\omega_0} = \frac{\tau_r \omega_0^2}{D} = \kappa^{-1} \quad (19)$$

Um den Schwinger zu Eigenschwingungen anzuregen, wird man neben dem Schwingungsgeber auch einen Schwingungsaufnehmer vorsehen. Es ist aus verschiedenen Gründen sinnvoll, den Schwingungsaufnehmer an einem anderen Ort zu montieren als den Schwingungsgeber. Zum einen reduziert man bei Kraft- bzw. Signalübertragung über Elektromagneten die direkte induktive Kopplung zwischen den Spulen. Zweitens kann man durch die Montage der elektromagnetischen Wandler in den Schwingungsknoten bzw. in den Orten maximaler Auslenkung bestimmte Resonanzmoden fördern oder unterdrücken.

Wir beschreiben den mechanischen Schwinger im folgenden durch eine Vierpolfunktion, welche die an den beiden Angriffspunkten von Geber und Aufnehmer wirkenden Kräfte F_i und Auslenkgeschwindigkeiten v_i in Beziehung setzen. Hierbei gibt β_{ij} das Verhältnis der Schwingungsamplituden der betrachteten Resonanzmode an den Punkten x_1 und x_2 an.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = g(\omega) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Nach Definition der Übertragungsfunktion ist nun stets $\beta_{11} = 1$. Die Amplitudenverhältnisse β_{ij} können entweder aus einer Simulation der strukturmehchanischen Gleichungen gewonnen oder durch Messung bestimmt werden.

Die Übertragungsfunktion nach Gl. (19) bzw. (20) bezieht sich nur auf eine bestimmte Resonanzmode. Der Schwinger besitzt im Allgemeinen jedoch sehr viele verschiedene Moden bei Frequenzen $\omega^{(k)}$. Da sich die Schwingungsamplituden und Auslenkgeschwindigkeiten der einzelnen Moden linear überlagern lassen (jedenfalls so lange die Gesetze der linearen Deformation gelten), kann man die Übertragungsfunktion des Schwingers als die Summe der Übertragungsfunktionen der einzelnen Resonanzmoden darstellen. Hierbei sind die Modellparameter für jede Mode im Allgemeinen verschieden.

$$g_{ij}^{(\text{tot})}(\omega) = \sum_k g_{ij}^{(k)}(\omega) = \sum_k \frac{i\omega \beta_{ij}^{(k)} / D^{(k)}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega^{(k)}}\right)^2 + \frac{i\omega}{\omega^{(k)2} \tau_r^{(k)}}} \quad (21)$$

Dies ist die allgemeinste Form der Übertragungsfunktion. In einer Rückkopplungsschleife, bei der eine Auslenkung am Punkt x_1 über einen aperiodischen, d. h. frequenzunabhängigen Verstärker mit definiertem Verstärkungsfaktor in eine Antriebskraft im Punkt x_2 umgesetzt wird, wird mit zunehmendem Verstärkungsfaktor diejenige Eigenresonanz zuerst anschwingen, die dem Summand $g^{(k)}$ mit betragsmäßig höchstem Maximum entspricht. Auf Einzelheiten werden wir später noch eingehen. Jedenfalls werden wir im Folgenden nur noch diesen spezifischen Beitrag zur Übertragungsfunktion untersuchen. Die Umschaltung zwischen den einzelnen Moden erfolgt durch Änderung des Auflagers des Schwingers (entsprechend einer Erhöhung oder Erniedrigung einzelner Dämpfungsfaktoren $\kappa^{(k)}$) oder durch Ändern der Angriffspunkte der Energiewandler, was einer Anpassung der Amplitudenverhältnisse $\beta_{12}^{(k)}$ entspricht.

3 Elektromagnetische Anregung von Eigenschwingungen

3.1 Energiewandler: magnetische vs. piezoelektrische Systeme

Eine einfache Umsetzung von elektrischer in mechanische Energie und umgekehrt sind mit magnetischen und piezoelektrischen Energiewandlern verschiedenster Bauarten möglich. Man spricht hierbei jeweils von einem magnetischen oder piezoelektrischen Wegaufnehmer, wenn mechanische Schwingungsenergie in eine elektrische Spannung umgesetzt wird, bzw. von einem Aktor, wenn elektrische Energie in eine mechanische Kraft umgewandelt wird.

Beim magnetischen Wandler übt beispielsweise ein Elektromagnet, der auf einer festen Auflage nahe am schwingenden Körper montiert ist, eine Kraft auf einen Permanentmagneten aus, der an einem bestimmten Punkt des Schwingers befestigt ist. Umgekehrt induziert dieser Magnet in der Wicklung des Elektromagneten eine Spannung, die mit der Phasenlage der mechanischen Schwingungen in einer festen Beziehung steht.

Beim piezoelektrischen System ist der Schwinger an einer bestimmten Stelle auf einem piezoelektrischen Bauelement gelagert. Dies ist zum Beispiel ein Quarzkristall oder ein ferroelektrischer Keramikkörper, der seinerseits auf einer festen Unterlage ruht. Der Quarz bzw. Keramikkörper ist auf zwei Seiten mit metallischen Elektroden beschichtet. Legt man hier nun eine elektrische Spannung an, dann tritt im Quarz eine Deformation ein, die sich auf den Schwinger überträgt. Umgekehrt entsteht an den Kontaktflächen des Quarzes eine elektrische Spannung, wenn eine Kraft auf die Auflagefläche ausgeübt wird, z.B. wenn der schwingende Körper im Takt einer Eigenschwingung am Auflagepunkt ausgelenkt wird.

Magnetische Energiewandler haben gegenüber piezoelektrischen Wandlern den Vorteil, dass die realisierbaren Auslenkungen verhältnismäßig groß sind. Zudem kann erreicht werden, dass der Permanentmagnet bei stromlosem Elektromagneten völlig kräftefrei ist. Die durch den Energiewandler bedingte Dämpfung des Schwingers ist also gering. Außerdem ist bei magnetischen Wandlern günstig, dass sie, sofern sie im Ruhezustand kräftefrei sind, am Schwinger leicht montiert und wieder abgenommen werden können, ohne dass dessen Lagerung verändert werden muß. Nachteilig ist allerdings, dass der maximale Wellenwiderstand des Schwingers am Ort des Permanentmagneten nicht sehr groß sein darf. Auch die Ausübung einer statischen Kraft erfordert eine beständige Zufuhr elektrischer Leistung an den Elektromagneten,

während dies beim piezoelektrischen Wandler nicht der Fall ist.

Als Referenz zu den elektromechanischen Energiewandler sei hier auf das Buch von Ballas, Pfeifer und Werthschützky⁶ verwiesen. In diesem Werk findet der Leser auch eine umfassende Darstellung der Vierpoltheorie elektromechanischer Wandler, die wir hier nur in einem sehr speziellen Rahmen vorstellen werden. Auch das Buch von Küpfmüller⁷ enthält eine knappe, aber sehr praxisnahe Behandlung dieses Punktes.

3.2 Betriebsparameter von Energiewandlern

Die Eigenschaften piezoelektrischer und magnetischer Wandler lassen sich danach spezifizieren, wie sie die elektrischen Größen Strom I und Spannung U , die an den Anschlußklemmen gemessen werden, in mechanische Bewegungsgrößen, nämlich Kraft F und Stellweg s oder Stellgeschwindigkeit $v = ds/dt$ umsetzen. Wir gehen hier davon aus, dass Kraft und Stellweg bzw. Stellgeschwindigkeit entlang derselben, fest vorgegebenen Achse wirken und definieren sie als z -Achse in einem kartesischen Koordinatensystem. Elektrische und mechanische Größen bezeichnen wir im folgenden als *Stellgrößen*, im Unterschied zu den konstruktiv bedingten Eigenschaften bzw. Parametern des Wandlers, die wir fortan als *Wandlerparameter* bezeichnen.

Das Produkt der elektrischen Stellgrößen U und I hat die Dimension einer Leistung. Als mechanische Stellgrößen verwenden wir daher F und v , deren Produkt ebenfalls eine Leistung ist. Hingegen betrachten wir den Stellweg s als eine aus der Stellgeschwindigkeit v abgeleitete Stellgröße, obwohl der Stellweg in der Praxis zweifellos eine der wichtigsten Größen ist. Für ein System, das periodische Schwingungen ausführt, sind $v(t)$ und $s(t)$ allerdings als äquivalent anzusehen. Nach Fouriertransformation können sie durch Multiplikation mit $i\omega$ leicht ineinander umgerechnet werden.

Von den vier Stellgrößen U , I , F und v , welche die Energieumformung definieren, können an einem gegebenen Energiewandler nur zwei frei gewählt werden, während die übrigen beiden eindeutig bestimmt sind. So kann beispielsweise an die Klemmen eines Wandlers, dessen Arbeitshebel man fixiert (d. h. v zu Null setzt), grundsätzlich jede beliebige Spannung U angelegt werden. Der sich einstellende Strom I und die resultierende Stellkraft F am Arbeitshebels sind dadurch bereits vollkommen bestimmt. Man kann sich leicht

⁶R. G. Ballas, G. Pfeifer, R. Werthschützky, *Elektromechanische Systeme in Mikrotechnik und Mechatronik*, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin und Heidelberg 2000, 2009, ISBN 978-3-540-89317-2, speziell Kap. 5 und 8.

⁷K. Küpfmüller, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, 10. Aufl., Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973, Par. 35.

davon überlegen, dass in allen anderen Fällen, in denen zwei von vier Stellgrößen durch die Randbedingungen vorgegeben sind, die beiden übrigen über ein Gleichungssystem von mathematischen Beziehungen festgelegt werden, die den Definitionen der Wandlerparameter entsprechen.

Wir untersuchen zunächst die Wirkung von infinitesimal kleinen Änderungen der Stellgrößen dU , dI , dF und dv gegenüber einem beliebig definierten Ruhezustand. Wir legen uns hierbei zunächst willkürlich auf den Strom I und die Stellgeschwindigkeit v als unabhängige, auf U und F als abhängige Größen fest. Es sei aber bereits jetzt vermerkt, dass eine nachträgliche Umrechnung auf jedes andere Paar von unabhängigen Stellgrößen weiterhin möglich ist. Da also $U(I, v)$ und $F(I, v)$ durch I und v vollständig bestimmt sind, läßt sich jede infinitesimale Änderungen dieser Größen durch die entsprechenden Änderungen von I und v ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} dU \\ dF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_i & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dI \\ dv \end{pmatrix} \quad (22)$$

Die in der Matrix auftretenden Koeffizienten, die ebenfalls Funktionen von I und v sein dürfen, sind durch die konstruktiven Eigenschaften des Wandlers gegeben und entsprechen den schon erwähnten Wandlerparametern. Im Einzelnen ist

$$Z_i = \left. \frac{\partial U}{\partial I} \right|_v \quad (23)$$

der differentielle elektrische Innenwiderstand des Wandlers, bzw. des Elektromagneten, der sich ergibt, wenn die Stellgeschwindigkeit v bei einer infinitesimalen Stromänderung dI konstant gehalten wird, bzw. gleich null ist. Der Innenwiderstand ist durch den ohmschen Widerstand R_m der Wicklung und ihre Induktivität L_m bestimmt, so dass $Z_i = R_m + i\omega L_m$ gesetzt werden kann. Weiterhin ist

$$\alpha_1 = \left. \frac{\partial U}{\partial v} \right|_I \quad (24)$$

die Generatorkonstante des Wandlers. Sie gibt an, wie die Klemmenspannung von einer Änderung der Stellgeschwindigkeit beeinflusst wird, wenn an den Klemmen keine Änderung des Erregerstroms I zugelassen wird, wenn also die Klemmen beispielsweise offen sind und der Strom durch den Wandler gleich null ist.

$$\alpha_2 = \left. \frac{\partial F}{\partial I} \right|_v \quad (25)$$

ist die Aktorkonstante. Sie gibt an, wie die Stellkraft vom Erregerstrom anhängt. Schließlich ist

$$-k = \left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_I \quad (26)$$

der Koeffizient der inneren Reibung bzw. mechanischen Trägheit des Wandler. In einem magnetischen Wandler, bei dem der Permanentmagnet berührungsfrei durch die Magnetwicklung bewegt wird, ist der Reibungskoeffizient Null. Wenn der Permanentmagnet, der am Schwinger befestigt ist, eine nicht zu vernachlässigende Masse m_p hat, kann dies als $k = -i\omega m_p$ berücksichtigt werden.

Sollen hingegen Spannung U und Kraft F als unabhängige Stellgrößen verwendet werden, dann ergibt sich durch simple Matrixinversion für die beiden nunmehr abhängigen Größen $I(U, F)$ und $v(U, F)$

$$\begin{pmatrix} dI \\ dv \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 + Z_i k} \begin{pmatrix} k & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -Z_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dU \\ dF \end{pmatrix} \quad (27)$$

Man beachte, dass die Wandlerparameter im SI-Einheitensystem unterschiedliche Dimensionen besitzen: So hat Z die Dimension $\Omega = \text{V/A}$, α_1 und α_2 die Dimension Vs/m oder alternativ N/A und die Dämpfung k die Dimension Ns/m .

3.3 Bedingungen für die Selbsterregung von Eigenschwingungen

Um Eigenschwingungen in einem mechanischen Resonator zu erzeugen, kann man an den Resonator zwei magnetische (oder piezoelektrische) Wandler montieren. Hierbei arbeitet einer der Wandler als Aktor. Er wird an den Ausgang eines geeigneten elektrischen Verstärkers angeschlossen, der ihn mit Strom und Spannung versorgt. Ein zweiter Wandler dient als Wegaufnehmer. Er wird an den Eingang des Verstärkers angeschlossen. Auf diese Weise entsteht eine Rückkopplungsschleife, bei der die vom Aktor erzeugten mechanischen Schwingungen über den Schwinger an den Aufnehmer weitergeleitet werden. Dieser erzeugt hieraus ein Spannungssignal, das nach entsprechender Verstärkung zur Ansteuerung des Aktors eingesetzt wird. Es wurde in Abschnitt 2.5 gezeigt, dass die mechanische Übertragung der Schwingungen nur für die Resonanzfrequenzen besonders effektiv ist. Durch geschickte Wahl des Verstärkungsfaktors und der Phasenlage lassen sich daher immer ganz spezifische Eigenmoden des mechanischen Schwingers anregen.

Wir untersuchen nun das Verhältnis zwischen einer Stromänderung dI in der Spule des Aktors, bzw. des Wandler #1, und der resultierenden Spannungsänderung dU an den Klemmen der Aufnehmerspule, bzw. des Wandler #2. Mit den bisher definierten Wandlerparametern und der Übertragungs-

funktion des Schwingers folgt:

$$dU_{\text{in}} = \left. \frac{\partial U}{\partial v} \right|_{I=0}^{(2)} \left. \frac{\partial v_2}{\partial F_1} \right|_{F_2=0} \left. \frac{\partial F}{\partial I} \right|_{v=0}^{(1)} dI_{\text{out}} \quad (28)$$

$$= \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(1)} \beta_{12} g(\omega) dI_{\text{out}} \quad (29)$$

Mit der Übertragungsfunktion $g(\omega)$ aus Gl. (16), den Parametern $\alpha_1^{(i)}$ und $\alpha_2^{(i)}$ der beiden Energiewandler und der Steilheit $S = dI_{\text{out}}/dU_{\text{in}}$ des Verstärkers läßt sich nunmehr folgende Bedingung angeben, die Voraussetzung für eine kontinuierliche Schwingung ist:

$$1 \leq \text{Re } S \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(1)} \beta_{12} |g(\omega)| = \frac{S \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(1)} \beta_{12} \omega / D}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 \tau_r}\right)^2}} \quad (30)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass der Verstärker einen unendlich hohen Ausgangswiderstand hat, bzw. dass $\partial I_{\text{out}}/\partial U_{\text{out}} \approx 0$. Unter dieser Voraussetzung gibt der Schwinger keine elektrische Energie durch magnetische Induktion an die Aktorspule ab, die am Ausgangswiderstand des Verstärkers dissipiert würde. Neben der Amplitudenbedingung (30) müssen auch die Phasenlagen von Strom und Spannung im elektromechanischen Teil des Systems wie auch im Verstärker miteinander übereinstimmen

$$-\arg S = \tan \phi(\omega) = \frac{\omega_0^2 \tau_r}{\omega} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right] \quad (31)$$

Aus der Phasenbedingung folgt, dass das System aus Resonator, Energiewandlern und Verstärker für den Fall, dass $\arg S = 0$ ist, nur mit der Frequenz $\omega = \omega_0$ schwingen kann.

Stellt man die Steilheit des Verstärkers auf den kritischen Wert S_{krit} ein, so dass die Schwingungen eben gerade einsetzen, dann muß nach Gl. (30) die Bedingung

$$\begin{aligned} S_{\text{krit}} &= \frac{D}{\alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(1)} \beta_{12} \omega_0^2 \tau_r} \\ &= \frac{\kappa}{\alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(1)} \beta_{12}} \end{aligned} \quad (32)$$

erfüllt sein. Wie man erkennt, sind hohe Kopplungsfaktoren der magnetischen Wandler, eine geringe Dämpfung des mechanischen Schwingers, und eine niedrige Rückstellkonstante D für das Einsetzen von Schwingungen günstig. Durch

Messung der für den Schwingungseinsatz kritischen Steilheit kann bei bekannten Werten der Wandlerparameter so insbesondere auch der Dämpfungsfaktor κ des Schwingers aus Gl. (19) bestimmt werden.

3.4 Funktionsweise und Berechnung von magnetischen Wandlern

3.4.1 Magnetischer Wegaufnehmer

Ein magnetischer Wegaufnehmer dient zur Umsetzung einer mechanischen Bewegung, vorzugsweise einer Oszillation, in ein elektrisches Signal. Hierzu wird an den Schwinger ein Permanentmagnet mit gegebenem magnetischen Moment \vec{m} montiert, der in eine feststehende Spule taucht. Bei Bewegung des Magneten entsteht an der Spule eine zur augenblicklichen Bewegungsgeschwindigkeit proportionale Spannung.

Das magnetische Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$, das der im Nullpunkt befindliche Permanentmagnet am Punkt \vec{r} des Raums erzeugt, berechnet sich zu⁸

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (33)$$

Das magnetische Feld ergibt sich hieraus zu $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Wir betrachten nun einen Drahttring C mit Radius R und berechnen die hierin induzierte Spannung. Hierzu werde der Permanentmagnet auf der zur Ringebene senkrechten z -Achse konzentrisch im Abstand a über der Ringebene montiert. Der Magnet wird so angebracht, daß sein magnetisches Moment \vec{m} in Richtung der z -Achse zeigt. Der magnetische Fluß Φ , der durch einen Ring geht, ist gleich

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{\vec{m}}{4\pi} \cdot \oint_C \frac{d\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\vec{m} \cdot \vec{e}_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} d\phi \\ &= \frac{\vec{m} \cdot \vec{e}_z}{2} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (34)$$

Bewegt sich nun der Magnet in z -Richtung mit einer Geschwindigkeit \dot{a} ent-

⁸J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, De Gruyter, Berlin 1983, Kap. 5.6. Es sei darauf hingewiesen, dass in diesem Buch andere Einheitensysteme verwendet werden (CGS) als im vorliegenden Bericht (SI). Hieraus ergeben sich Unterschiede in den Vorfaktoren.

lang der Ringachse, dann induziert dies im Ring die Spannung

$$U_{\text{ind}}^C(a) = -\dot{a} \frac{\partial \Phi(a)}{\partial a} = \frac{3}{2} \dot{a} \vec{m} \cdot \vec{e}_z \frac{R^2 a}{(R^2 + a^2)^{5/2}} \quad (35)$$

In der Praxis verwendet man an Stelle eines Drahrings eine Spule mit vielen Windungen n , die beispielsweise einlagig auf einen Zylindermantel der Länge L aufgewickelt sind. In diesem Fall berechnet sich die induzierte Spannung zu

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}}(R, L) &= \frac{n}{L} \int_{a-L/2}^{a+L/2} U_{\text{ind}}^C(z) dz \\ &= \dot{a} \vec{m} \cdot \vec{e}_z n \frac{R^2}{L} \left(\frac{1}{\{(a+L/2)^2 + R^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{(a-L/2)^2 + R^2\}^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

wobei die Position a des Magneten auf den Mittelpunkt der Spule bezogen ist.

Bei einer mehrlagigen Zylinderspule, bei der die Wicklung die Länge L , den Innendurchmesser D_0 und den Außendurchmesser D_1 hat, ergibt sich die induzierte Spannung zu

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}}(D_0, D_1, L) &= \frac{2}{D_1 - D_0} \int_{D_0/2}^{D_1/2} U_{\text{ind}}(R, L) dR \\ &= \dot{a} \frac{2 \vec{m} \cdot \vec{e}_z n}{L(D_1 - D_0)} \left[\xi_1 \left(\frac{2a+L}{D_1} \right) - \xi_1 \left(\frac{2a+L}{D_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - \xi_1 \left(\frac{2a-L}{D_1} \right) + \xi_1 \left(\frac{2a-L}{D_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

wobei folgende Funktion auszuwerten ist.

$$\xi_1(x) = \log \left(1 + \sqrt{1 + x^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (39)$$

Somit berechnet sich die Generatorkonstante des Wandlers wie folgt:

$$\alpha_1 = 2 \vec{m} \cdot \vec{e}_z n \frac{\xi_1 \left(\frac{2a+L}{D_1} \right) - \xi_1 \left(\frac{2a+L}{D_0} \right) - \xi_1 \left(\frac{2a-L}{D_1} \right) + \xi_1 \left(\frac{2a-L}{D_0} \right)}{L(D_1 - D_0)} \quad (40)$$

Man beachte hierbei, dass Gl. (40) für den Fall, daß $a(t)$ eine beliebige Zeitfunktion darstellt, vollkommen exakt und auch bei großen Auslenkungen des Permanentmagneten gültig ist. Die Gleichung stellt allerdings in bezug auf die Größe des Permanentmagneten eine Näherung dar, weil dieser allein durch sein Dipolmoment \vec{m} charakterisiert wird. Dies ist nur dann exakt, wenn der Magnet sehr klein gegen den inneren Spulendurchmesser ist.

3.4.2 Magnetische Aktoren

Die Kraft, die in einem magnetischen Feld \vec{H} auf ein magnetisches Moment \vec{m} ausgeübt wird, berechnet sich zu

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{H}) \quad (41)$$

Auf einen Permanentmagneten, der in eine Zylinderspule gesteckt wird und dessen magnetisches Moment entlang der Achse der Spule orientiert ist, reduziert sich dies zu

$$F_z = \vec{m} \cdot \vec{e}_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \quad (42)$$

Das magnetische Feld einer Zylinderspule mit der Länge L , dem Innendurchmesser D_0 und dem Außendurchmesser D_1 berechnet sich an der Position z auf der Spulenachse zu

$$\begin{aligned} H_z(z) = & \frac{nI}{L(D_1 - D_0)} \left[D_1 \xi_2 \left(\frac{2z+L}{D_1} \right) - D_0 \xi_2 \left(\frac{2z+L}{D_0} \right) \right. \\ & \left. - D_1 \xi_2 \left(\frac{2z-L}{D_1} \right) + D_0 \xi_2 \left(\frac{2z-L}{D_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

wobei folgende Funktion auszuwerten ist.

$$\xi_2(x) = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{4} \log(1+x^2) \quad (44)$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} F_z = & \frac{nI \vec{m} \cdot \vec{e}_z}{2L(D_1 - D_0)} \left[\xi_3 \left(\frac{2z+L}{D_1} \right) - \xi_3 \left(\frac{2z+L}{D_0} \right) \right. \\ & \left. - \xi_3 \left(\frac{2z-L}{D_1} \right) + \xi_3 \left(\frac{2z-L}{D_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (45)$$

mit

$$\xi_3(x) = \log(1+x^2) \quad (46)$$

Die Aktorkonstante ist somit gleich

$$\alpha_2 = \vec{m} \cdot \vec{e}_z n \frac{\xi_3 \left(\frac{2a+L}{D_1} \right) - \xi_3 \left(\frac{2a+L}{D_0} \right) - \xi_3 \left(\frac{2a-L}{D_1} \right) + \xi_3 \left(\frac{2a-L}{D_0} \right)}{2L(D_1 - D_0)} \quad (47)$$

Auch diese Formel ist in Bezug auf die relative Position von Magnet und Spule exakt. Abbildung 1 zeigt die Wandlerparameter für die im Experiment verwendeten Wandler.

3 ELEKTROMAGNETISCHE ANREGUNG VON EIGENSCHWINGUNGEN 26

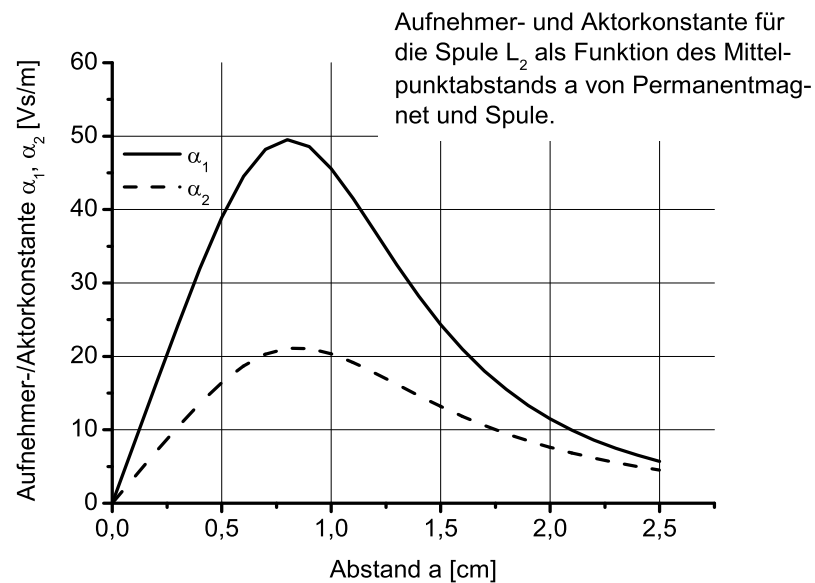
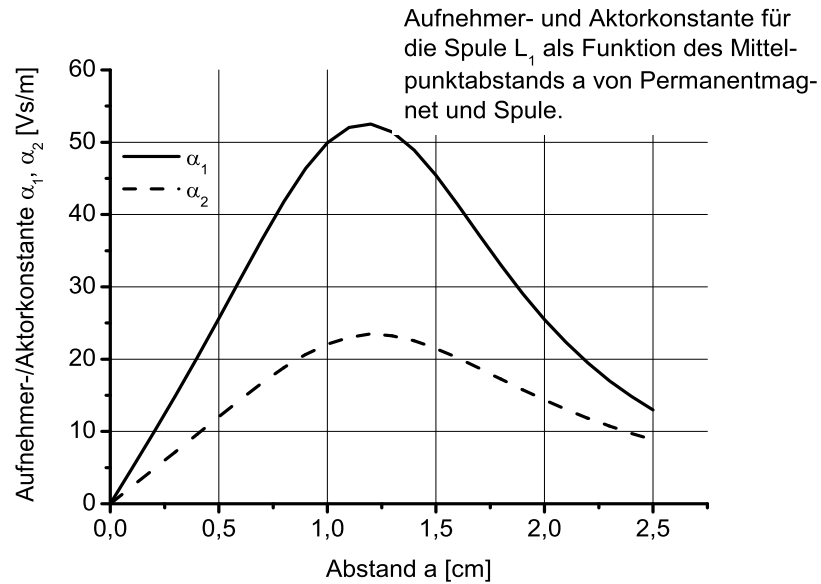


Abbildung 1: Wandlerparameter α_1 und α_2 für die beiden Spulen als Funktion des Abstandes a zwischen Spulenmittelpunkt und Mittelpunkt des Permanentmagneten. Als Permanentmagnet wurde jeweils ein Zylindermagnet aus Neodym-Eisen-Bor-Legierung mit 5 mm Länge und 10 mm Durchmesser verwendet. Die Sättigungsmagnetisierung ist gleich 1,61 T, das magnetische Moment gleich 0,5031 Am.



Abbildung 2: Stimmgabel mit angehefteten Permanentmagneten. Davor jeweils Aktor- und Aufnehmerspule, die über einen Hubtisch vor den Magneten positioniert werden konnten.

4 Experimentelle Ergebnisse

4.1 Vorversuche

Um die prinzipielle Durchführbarkeit der elektromagnetischen Anregung mechanischer Eigenresonanzen zu zeigen, wurde in einer ersten Versuchsserie eine Stimmgabel als mechanischer Resonator verwendet. An den Zinken der Stimmgabel wurden zwei Eisen-Neodym-Bor-Magnete befestigt, die in zwei Spulen eintauchten (Abb. 2). Diese Spulen mit je 23000 bzw. 17700 Windungen dienten als Aufnehmer und Aktorspule. Die Stimmgabel war auf den Kamerton a gestimmt, d. h. auf eine Resonanzfrequenz von 440 Hz. Durch das Anheften Permanentmagnete verschob sich diese auf 415 Hz. Der Verstärker, der den Strom für die Aktorspule erzeugte, war extrem einfach aufgebaut und bestand nur aus einer einzelnen Elektronenröhre mit einer RC-Beschaltung

des Steuergitters entsprechend dem gewünschten Arbeitspunkt. Als Röhren wurden eine Triode (EABC 80) sowie zwei verschiedene Pentoden (EF 184, EL 84) verwendet.

Nach der Justierung der Spulen und dem Einschalten des Verstärkers setzten die Schwingungen bei korrekter Polung der Spulen unmittelbar ein. Infolge der sehr hohen Güte der Stimmgabel von $Q \approx 3000$ reichten bei Verwendung der beiden Pentoden im Verstärker bereits kleinste Betriebsspannungen aus. Eine Regulierung des Verstärkungsgrades war hier dadurch möglich, dass Aktor- bzw. Aufnehmerspule von den Magneten 2 bis 3 cm entfernt wurden.

Wenn als Verstärkerröhre die Triode eingesetzt wurde, dann erwies sich die Schwingungserzeugung als deutlich schwieriger. Hier konnten die Schwingungen nur bei starker Ankopplung von Aktor- und Aufnehmerspule an die Permanentmagneten erzielt werden. Außerdem erwies es sich als zweckmäßig, die Phasenlage in der Aktorspule durch Parallelschaltung eines Kondensators von $0,1 \mu\text{F}$ zu korrigieren. Für dieses im Vergleich zu den Pentoden deutlich schlechtere Ergebnis läßt sich der geringe dynamische Innenwiderstand der Triode verantwortlich machen. Dieser bewirkt einerseits eine zusätzliche Dämpfung der Stimmgabel über den Aktor. Außerdem vermag die Triode nicht, die Phasengleichheit von Eingangsspannung und Ausgangsstrom zu gewährleisten. In den weiteren Versuchen wurde daher ausschließlich mit Schaltungen gearbeitet, bei denen die induktive Last des Aktors über Pentoden angesteuert wurde.

4.2 Herstellung eines Betonschwingers

Das Herzstück des aufgebauten mechanischen Schwingers ist ein hinreichend fester, elastischer Quaders aus Beton. Dieser sollte möglichst homogen und vor allem frei von Rissen sein. Für erste Versuche wurde ein Quader mit 80 cm Länge und einem Querschnitt von 5 cm mal 10 cm hergestellt. Der verwendete Beton wurde aus 4 Teilen feinkörnigem Bausand und einem Teil Zement gemischt. Zur Verbesserung der Elastizität wurden einige Gewichtsprozent einer Polymerdispersion (PCI) beigefügt. Der Zement wurde gründlich verrührt und mit soviel Wasser gemischt, dass er eine relativ dünnflüssige Konsistenz hatte. Anschließend wurde er in eine entsprechend bemessene, innen glatte und wasserabweisende Holzverschalung gegossen. Auf Armierungsdraht wurde verzichtet. Nach etwa 7 Tagen war der Quader vollständig getrocknet und konnte aus der Form entnommen werden (Abb. 3). Nach einer weiteren 7-tägigen Trocknung an Luft wurden zunächst alle an der Oberfläche verbliebenen Löcher und Gasblasen sowie einige oberflächliche Risse an den Kanten des Quaders mit Spachtelmasse verfüllt. Nach dem Glattschleifen wurde der ab-

solot trockene Betonquader dann mit Acrylfarbe beschichtet, um die spätere Aufnahme von Feuchtigkeit zu verhindern und den relativ scharfkantigen Quader besser handhaben zu können. Zudem lassen sich auf dem Acryl leichter Markierungen und Klebefolien anbringen und wieder entfernen als auf der rauhen Betonoberfläche.

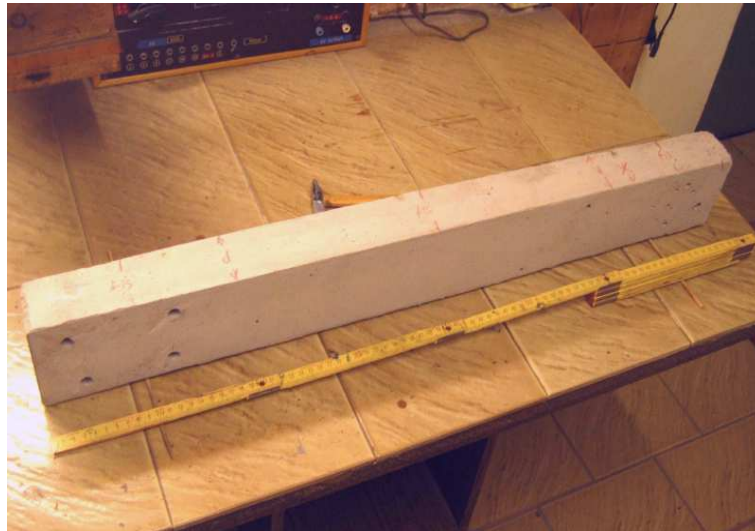


Abbildung 3: Der gegossene Betonquader nach der Ausschalung.

Zur Lagerung des Betonquaders in den Knotenpunkten der Biegeschwingungen wurde er auf zwei Holzleisten mit etwa 3 cm Höhe gestellt, in die zur Justierung der Höhe jeweils zwei Schrauben bis zu $\frac{2}{3}$ ihrer Länge eingeschraubt waren. Der Quader lag also an vier Punkten auf, nämlich auf den Schraubenköpfen. Die Höhe der Lagerpunkte konnte durch mehr oder weniger tiefes Eindrehen der Schrauben in die Holzleisten verändert werden.

Zur Montage der Permanentmagnete wurden an die Unterseite des Quaders direkt an den Enden zwei etwa 2 mal 5 cm große Stücke selbstklebender Stahlfolie aufgeklebt⁹. Hierauf wurden die Permanentmagnete der beiden Energiewandler gesetzt. Die Höhe der Lagerschrauben wurde so eingestellt, dass die zylindrischen Magnete gerade eben in die Spulen eintauchten. Der Aufbau ist in Abb. 4 schematisch gezeigt. Abbildung 5 zeigt den praktischen Aufbau.

⁹Hersteller: Georg Martin GmbH, Martinstraße 55, D-63123 Dietzenbach, unlegierte Stahlfolie Typ M-Tech F, Dicke 50 μm

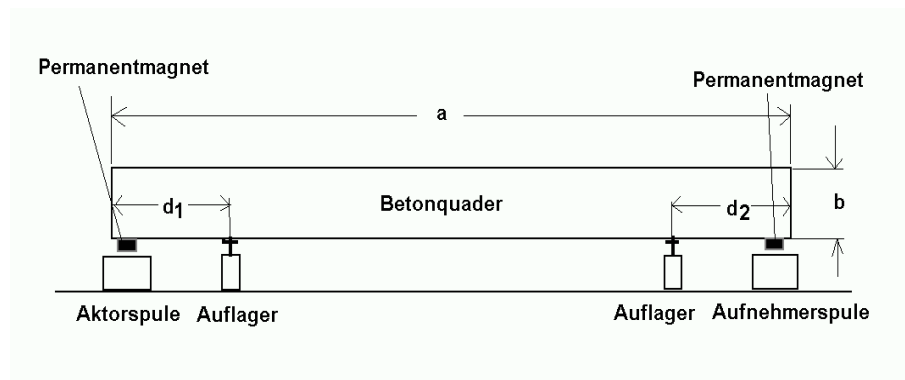


Abbildung 4: Schematischer Aufbau des Betonschwingers mit Aktor- und Aufnehmerspule.

Wichtig für die Berechnung der Schwingungseigenschaften ist die Kenntnis von Massendichte, Elastizitäts- und Schubmodul sowie der mechanischen Dämpfung. Die Massendichte des Quaders wurde durch Ausmessen seines Volumens und Bestimmung des Gewichts zu $\rho = 2,005 \pm 0,02 \text{ g/cm}^3$ berechnet. Der Elastizitätsmodul wurde mittels Gl. (4) aus der Frequenz der niedrigsten Biegeschwingung zu $E = 22,7 \pm 0,3 \text{ GPa}$ bestimmt, nachdem die Angaben aus der Literatur nur sehr unpräzise waren. Der Schubmodul wurde aus dem gemessenen Wert des Elastizitätsmoduls E und dem Literaturwert für das Poissonverhältnis $\nu \approx 0,28$ für Beton zu

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \approx 8,9 \text{ GPa} \quad (48)$$

berechnet.

4.3 Energiewandler

Als Aufnehmer und Aktor wurden magnetische Systeme verwendet, bestehend aus jeweils einer Zylinderspule und einem Neodym-Eisen-Bor-Magneten. Die wesentlichen Daten der Spulen sind in Tabelle 2 zusammengefaßt und in Abbildung 1 als Funktion des Abstandes des Permanentmagneten von der Spulenummitte aufgetragen¹⁰. Die zylinderförmigen Permanentmagneten hatten einen

¹⁰Die genauen Daten der verwendeten Spulen waren zunächst unbekannt und wurden mit dem Spulenberechnungstool L-Culator (sauerampfer.homepage.t-online.de) ermittelt. Hierzu mußte mittels Gaussmeter die magnetische Induktion im Mittelpunkt der Spulen bei beigegebenem Erregerstrom sowie der Gleichstromwiderstand ermittelt werden. Das Berechnungstool erlaubt dann die Bestimmung der Windungszahlen und des Drahtdurchmessers.



Abbildung 5: Betonquader mit Aktorspule (links hinten) und Aufnehmerspule (rechts vorne). Oben: liegende, unten: stehende Position des Betonquaders.

	Aufnehmer	Aktor
Außendurchmesser D_1	31 mm	30 mm
Innendurchmesser D_0	15 mm	12 mm
Länge L	23 mm	15 mm
Windungszahl	23 000	13 800
Drahtdurchmesser	0,08 mm	0,08 mm
elektr. Widerstand	6,8 k Ω	3,2 k Ω
Induktivität	7,0 H	2,5 H
Feldstärke bei 10 mA	–	7,05 mT
α_1	43,5 Vs/m (a = 15,5 mm) 18,2 Vs/m (a = 22,5 mm)	32,5 Vs/m (a = 13 mm)
α_2	20,9 Vs/m (a = 15,5 mm) 11,3 Vs/m (a = 22,5 mm)	16,2 Vs/m (a = 13 mm)

Tabelle 2: Wicklungsdaten der Energiewandlerspulen.

Durchmesser von 1 cm und eine Höhe von 5 mm. Sie passten genau in die Bohrungen der Spulenkörper. Es erwies sich als vorteilhaft, die Einbauhöhe der Spulen gegenüber den Magneten durch Unterlegen von Platten unterschiedlicher Dicke nachträglich verändern zu können, um beispielsweise die Spulen ohne Anheben des schweren Betonquaders oder Demontage der Permanentmagneten unter dem Quader herausnehmen zu können. Aus den Maßen der Magnete und mit der Magnetisierung der Neodym-Eisen-Bor-Legierung von 1,61 T berechnet sich das magnetische Moment $|\vec{m}|$ der Magneten zu 0,50 Am.

4.4 Ansteuer-Verstärker

Die Ansteuerung der Aktorspule mit den Signalen aus der Aufnehmerspule erfordert eine Verstärkerschaltung mit ausreichend hohem Verstärkungsfaktor, die zudem die Gleichphasigkeit des Erregerstroms mit der Signalspannung sicherstellt. Dies ist mit gewöhnlichen Verstärkerschaltungen, wie man sie für Tonwiedergabe verwendet, nicht zu erreichen, da diese auf eine Phasengleichheit von Eingangs- und Ausgangsspannung ausgelegt sind. Eine besondere

Eigenschaft	Sollwert
Eingangswiderstand	$\geq 1 \text{ M}\Omega$
Ausgangswiderstand	$\geq 50 \text{ k}\Omega$
Ausgangsstrom (Spitze)	50 mA
Ausgangsruhestrom	0 - 25 mA
Ausgangsspannung (Spitze) im Normalbetrieb	600 V
dsgl. im Fehlerfall	2 kV
Frequenzbereich	20 Hz - 2 kHz
Phasenfehler	$\leq 10^\circ$
Gesamtsteilheit	$\geq 500 \text{ mA/V}$

Tabelle 3: Anforderungsliste für den Ansteuer-Verstärker.

Schwierigkeit besteht zudem darin, dass der Verstärker aufgrund der Selbstinduktion der Aktorspule hohe Spannungen verarbeiten muß, die im regulären Betrieb Spitzenwerte um 500 V erreichen können, im Ausnahmefall jedoch noch wesentlich höher liegen. Die Anforderungen an den Verstärker sind in Tabelle 3 zusammengefaßt. Erste Versuche haben ergeben, dass die hohe Spannungsfestigkeit mit Halbleitern nur sehr schwer zu realisieren ist. Auch moderne Hochspannungs-IGBTs sind hier schnell an der Spannungsgrenze. Kritisch ist hierbei weniger die normale Betriebssituation, sondern eher, wenn der Verstärker stark übersteuert wird, oder wenn der mechanische Schwinger einen festen Stoß, beispielsweise durch Schlag mit einem Hammer erhält. Hierdurch können in der Magnetspule des Aktors infolge der Eigenresonanz der Spule hohe, hochfrequente Spannungsimpulse entstehen.

Aus diesem Grund wurde eine Verstärkerschaltung in Röhrentechnik entworfen. Auch hierbei können in seltenen Fällen gelegentlich Überschläge im Anodenkreis der Leistungspentode auf. Diese blieben jedoch in allen Fällen ohne erkennbare Konsequenzen. Eine Schaltungen, die alle Anforderungen weitgehend erfüllt und erfolgreich geprüft wurde, wird in Abb. 6 gezeigt. Dieser dreistufige, kondensatorgekoppelte Röhrenverstärker entspricht dem Prinzip nach einem herkömmlichen Tonverstärker, wie er in der Literatur sehr häufig beschrieben wird¹¹. Als Referenz zur Dimensionierung des Verstärkers

¹¹O. Limann, *Funktechnik ohne Balast*, 12. Aufl., Franzis-Verlag, München 1972.

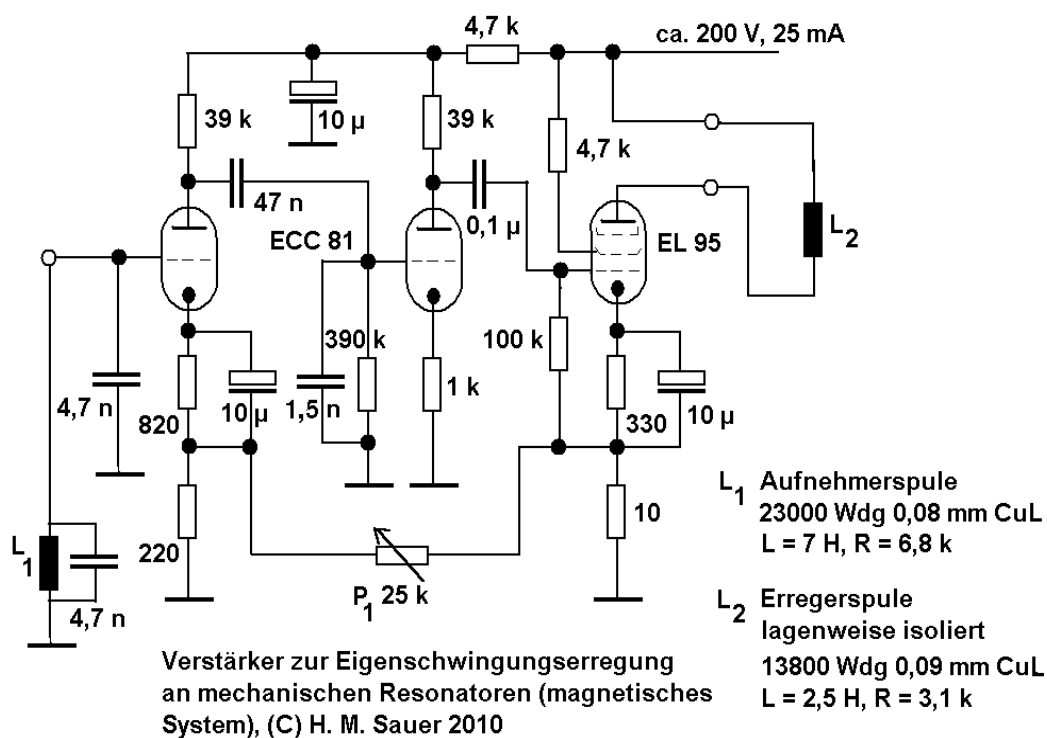


Abbildung 6: Schaltplan des Ansteuerverstärkers.

und zu den Arbeitspunkten der Verstärkerröhren sei auf die Datenblätter der verwendeten Röhrentypen ECC 81¹² und EL 95¹³ hingewiesen.

Allerdings wurden verschiedene Schaltungsmerkmale verändert, um den Verstärker zur Ansteuerung von magnetischen Aktoren besonders geeignet zu machen. Unter anderem ist er mit einer regelbaren Stromgegenkopplung über alle Verstärkerstufen hinweg ausgestattet. Mit dem Potentiometer P_1 kann die Gesamtsteilheit des Verstärkers zwischen etwa 90 und 1100 mA/V eingestellt werden.

Der versuchsweise Aufbau des Verstärkers erfolgte mit Bauelementen, die in einem speziellen Stecksystem kontaktiert und zusammengeschaltet werden können. Dies erlaubt eine rasche und einfache Veränderung der Schaltung. Die Verstärkerröhren wie auch die dazu passenden Sockel stammten aus der

¹²PhilipsTM Datenblatt ECC81, Philips Corporation 1969

¹³PhilipsTM Electronic Tube handbook EL95, Philips Corporation 1957. Beide Datenblätter wurden im Internet über <http://frank.pocnet.net/index.html> bezogen.

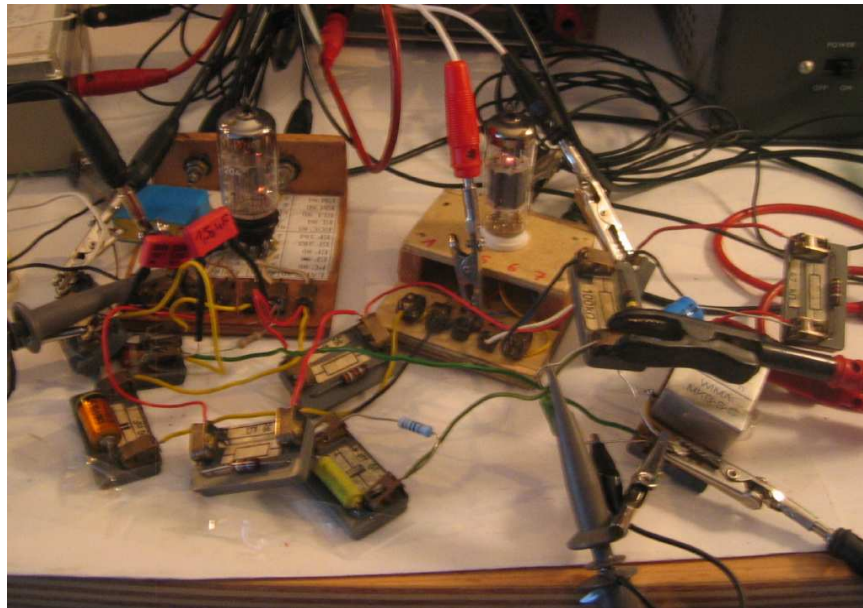


Abbildung 7: Versuchsaufbau des Ansteuerverstärkers mit elektronischen Bauelementen, die nach dem Klemmensystem eines Experimentierbaukastens verdrahtet wurden. Die Sockel für die beiden Elektronenröhren (links: ECC 81 rechts: EL 95) sind nicht Bestandteil des Baukastens, sondern Eigenbauten.

Messgerätesammlung des Autors, können als gängige Typen jedoch auch im Versandhandel bezogen werden¹⁴. Abbildung 7 zeigt den zusammengesteckten Schaltungsaufbau, an dem auch alle weiteren Messungen durchgeführt wurden¹⁵.

Die Stromgegenkopplung bewirkt, dass der differentielle Ausgangswiderstand, den die Anode der Endröhre der Aktorspule bietet, von dem ohnehin hohen Wert von etwa $R_a \approx 50 \text{ k}\Omega$ noch einmal drastisch erhöht wird. Aus der Steilheit $S_3 \approx 6 \text{ mA/V}$, ihrem Kathodenwiderstand $R_k = 10 \text{ }\Omega$, der Spannungsverstärkung $V \approx 100$ der beiden Vorverstärkerstufen und dem Teilungsfaktor ϑ des Gegenkopplungs-Spannungsteilers bestehend aus dem Poti P_1 und dem Kathodenwiderstand $R_{k1} = 220 \text{ }\Omega$ der ersten Verstärkerröhre berechnet sich der Ausgangswiderstand der Schaltung für kleine Signalampli-

¹⁴z.B. www.pollin.de, www.btb-elektronik.de, www.die-wuestens.de

¹⁵Stecksystem aus dem Kosmos Elektronik-Labor X, Francksche Verlagsbuchhandlung W. Keller & Co., Stuttgart 1966

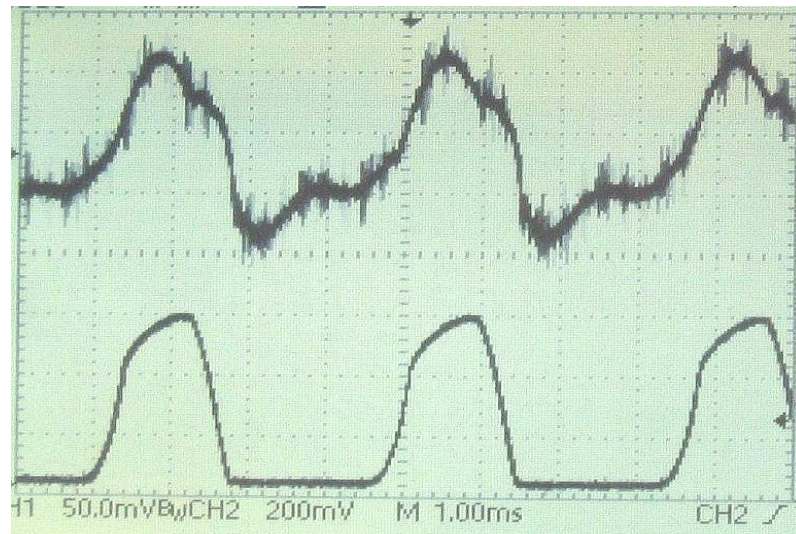


Abbildung 8: Typisches Oszillogramm von Eingangsspannung und Ausgangsstrom des Verstärkers bei deutlicher Übersteuerung.

tuden zu

$$R_a^{\text{eff}} = R_a [1 + \vartheta S_3 R_k (V + 1)] \quad (49)$$

Die Frequenzbandbreite des Verstärkers wurde durch Kondensatoren am Eingang nach oben hin auf etwa 2 kHz begrenzt, um die Schwingneigung in Folge kapazitiver Rückkopplung zwischen der Aktorspule und dem sehr hochohmigen Eingang zu vermindern. Die Endpentode ist auf einen Ruhestrom von 22 mA eingestellt. Ein höherer Ruhestrom ist wegen der in der Aktorspule anfallenden Verlustleistung nicht sinnvoll. Der Spitzenstrom bei Vollaussteuerung beträgt 50 mA. Abbildung 8 zeigt Eingangsspannung (oben) und Ausgangsstrom (unten) im Zustand starker Übersteuerung des Verstärkers. Man erkennt hieran, dass der Verstärker das mit verschiedenen hochfrequenten Störungen überlagerte Signal vom Schwingungsaufnehmer in ein phasengleiches Impulssignal verstärkt, das auch von Überschwängen frei ist.

In Abb. 9 ist das Kennlinienfeld (Ausgangsstrom vs. Steuerspannung) für unterschiedliche Einstellungen der Gegenkopplung gezeigt, wobei die Endpentode eine Aktorspule mit einer Induktivität von 2,5 H steuert. Der Verstärker wurde mit einer sinusförmigen Signalspannung angesteuert. Bei einer eingestellten Steilheit von 125 mA/V setzen hier Eigenschwingungen ein. Die Bedingung (30) für das Einsetzen von Eigenschwingungen ist hier gerade eben erfüllt. Es tritt keine nennenswerte Übersteuerung auf. Anodenstrom und Eingangsspannung sind im linearen Bereich der Kennlinie trotz der induktiven

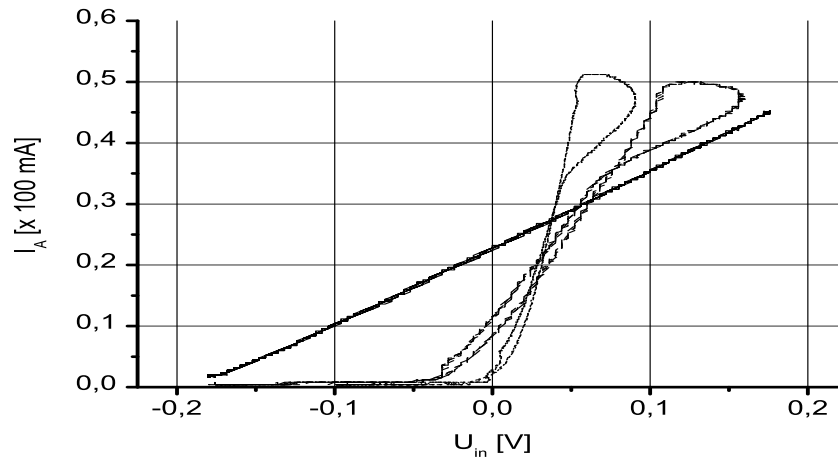


Abbildung 9: Anodenstrom vs. Steuerspannung des Verstärkers für verschiedene Einstellungen der Gegenkopplung (Poti P_1). Ausgangslast: Aktorspule mit $L = 2,5 H$. Die Steilheit des Verstärkers bei den jeweiligen Stellungen beträgt 125, 385 und 1100 mA/V.

Last praktisch phasengleich.

Stellt man höhere Steilheiten ein, dann gerät der Verstärker in die Sättigung. Hin- und Rücklauf-Kennline weichen zudem im Bereich großer Anodenströme voneinander ab. Hieraus erklärt sich der beobachtete Anstieg der Dämpfung des Schwingers, wenn die Steilheit über den kritischen Wert hinaus erhöht wurde: durch Induktion in der Aktorspule wird dem Schwinger Energie entzogen und im Anodenkreis des Verstärkers dissipiert. Die dissipierte Leistung ist zu der Fläche, die von der Betriebskurve eingeschlossen wird, proportional. Die dissipierte Leistung wird hierbei vor allem durch die höheren Harmonischen der Eigenschwingung bestritten, mithin also von den nichtlinearen Eigenschaften bestimmt. Von der Möglichkeit, eine höhere Verstärkung bzw. an Steilheit einzustellen, braucht nur dann Gebrauch gemacht zu werden, wenn die Dämpfung durch äußere Maßnahmen erhöht bzw. eine Resonanzmode mit geringerer Güte angeregt wird.

4.5 Störeffekte

Bei Verstärkern mit hohem Verstärkungsfaktor bzw. hoher Transkonduktanz besteht zunehmend das Risiko einer unerwünschten Rückkopplung durch ka-

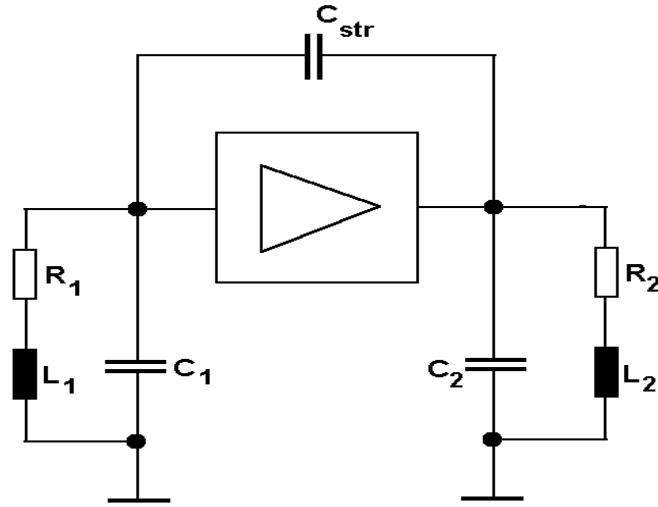


Abbildung 10: Ersatzschaltbild der Rückkopplung zwischen Eingang und Ausgang des Verstärkers über die Streukapazität.

pazitive oder induktive Kopplung vom Ausgang auf den Eingang. Dies kann zu Eigenschwingungen des elektrischen Systems, aber auch zu einer unerwünschten Gegenkopplung führen. Hierdurch werden die mechanischen Eigenresonanzen überlagert bzw. unterdrückt. Im vorliegenden Fall ist von Vorteil, wenn der Verstärker auf eine weitgehende Phasengleichheit von Eingangsspannung und Ausgangsstrom hin optimiert ist. Somit sind bei vorwiegend induktiver Last am Ausgang Eingangsspannung und Ausgangsspannung um nahezu 90° phasenverschoben. Eine Schwingungserzeugung durch induktive Rückkopplung zwischen den Spulen des Schwingungsaufnehmers am Eingang und des Aktors am Ausgang ist damit weitgehend ausgeschlossen, da die Selbsterregungs-Phasenbeziehung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung nicht erfüllt werden kann.

Andererseits besteht die Gefahr, dass Eigenschwingungen über die Streukapazität C_{str} zwischen Eingang und Ausgang induziert werden. Diese Art der Rückkopplung sei an des Ersatzschaltbildes in Abb. 10 diskutiert.

Das Verhältnis Z_{str} zwischen der Spannung, die über die Streukapazität C_{str} vom Ausgang auf den Eingang übertragen wird, und dem Anodenstrom I_A , der die Aktorspule durchfließt, berechnet sich zu

$$Z_{\text{str}}(\omega) = \left. \frac{dU_1}{dI_A} \right|_{C_{\text{str}}} = \frac{-i\omega^3 C_{\text{str}} L_1 L_2}{1 - \omega^2 C_1 L_1 - i\frac{\omega L_1}{R_1}} \quad (50)$$

Dieser Ausdruck nimmt sein betragsmäßiges Maximum an und wird gleichzeitig reellwertig, wenn mit $\omega = \omega_1 = \frac{1}{L_1 C_1}$ die Aufnehmerspule und ihre Parallelkapazität in Resonanz sind. Es ist dann

$$Z_{\text{str}}(\omega_2) = \left. \frac{dU_1}{dI_A} \right|_{C_{\text{str}}}^{\text{res}} = \frac{C_{\text{str}} L_2 R_1}{C_1 L_1} \quad (51)$$

Setzen wir hier die in Tabelle 2 angegebenen Werte für die Aufnehmerspule ein, und schätzen die Streukapazität zu $C_{\text{str}} \approx 10$ pF ab, dann ergibt sich als Resonanzfrequenz $\omega_1 \approx 600$ Hz, und $Z_{\text{str}} \approx 1 \Omega$. Die Bedingung für das Einsetzen von störenden Schwingungen lautet $S |Z_{\text{str}}| \geq 1$. Tatsächlich beobachtet man in der beschriebenen Versuchsschaltungen bei Steilheiten des Verstärkers jenseits $S = 1000$ mA/V eine vom mechanischen System unabhängige Schwingung von 580 Hz. Die Schwingung rissen nicht ab, wenn die Aufnehmerspule vom Schwinger abmontiert und in ihrer Ausrichtung relativ zur Montagerichtung verdreht wurde. Dies deutet eindeutig darauf hin, dass hier eine kapazitive Kopplung zwischen Eingangs- und Ausgangskreis die Ursache der Störschwingung war.

4.6 Berechnete und gemessene Eigenresonanzen

Die Eigenfrequenzen für die verschiedenen Biegeschwingungen wurden nach zwei verschiedenen Methoden berechnet. Zunächst wurde Gl. (4) herangezogen. Diese beruht auf der Näherung der mechanischen Spannungen im Schwinger als einachsigen Spannungszustand. Ferner wurde in einer FEM-Simulation eine Eigenfrequenzanalyse von Gl. (7), die das System korrekterweise als zweiachsigen Spannungszustand beschreibt, durchgeführt. Außerdem wurden Eigenresonanzen mit dem oben beschriebenen Betonquader unter Verwendung der beiden in Abschnitt 4.3 beschriebenen magnetischen Energiewandler und des Ansteuerverstärkers aus Abschnitt 4.4 experimentell untersucht. Hierbei konnten zumindest einige der niederfrequenten Schwingungen erfolgreich nachgewiesen werden. Bei den experimentellen Versuchen wurden die Permanentmagnete an den Enden des Quaders wie beschrieben auf selbstklebender Stahlfolie befestigt. Dabei wurde darauf geachtet, dass der Ruhestrom, der durch die Aktorspule fließt, so gerichtet ist, dass das Magnetfeld der Spule den Permanentmagneten gegen den Quader drückt, bzw. die Spule auf ihre Unterlage. Die Aufnehmerspule wurde hingegen so gepolt, dass die in der jeweiligen Resonanzmode erzeugte Signalspannung die gewünschte Phasenlage hatte. Dies ist in Spalte 3 der Tabelle 4 jeweils als *normale* oder *inverse* Polung vermerkt. Die Frequenzen der Eigenmoden wurden bei einer Einstellung des Steilheitsreglers durchgeführt, bei der die Schwingungen eben gerade

Quaderstel.	Auflager	Polung	Messung	1-achsig	2-achsig	Mode
liegend	34; 46	invers	10,0 Hz	–	–	Wippbewegung
liegend	11,3; 68	invers	71 Hz	–	–	Pumpbewegung
liegend	16,5; 63	normal	270 Hz	270 Hz*	267,7 Hz	Biegung 2 Kn.
stehend	16,5; 63	normal	475 Hz	540 Hz	518 Hz	Biegung 2 Kn.
stehend	34; 46	normal	488 Hz	540 Hz	518 Hz	dsgl.
lieg., steh.	alle	invers	580 Hz	–	–	kap. Rückk.
liegend	11,3; 68	invers	722 Hz	744,5 Hz	725 Hz	Biegung 3 Kn.

Tabelle 4: Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen des Betonquaders. 1. Spalte: liegend, stehend: Quader liegt auf Breitseite bzw. Schmalseite. 2. Spalte: Position der Lagerböcke in cm vom Ende des Quaders. 3. Spalte: relative Polung der beiden Energiewandler. *: Eigenfrequenz diente zur Berechnung des E-Moduls des Betons.

eine stabile, aber geringe Amplitude hatten und die Strom- bzw. Spannungsverläufe sinusförmig waren. Die Signalspannung der Aufnehmerspule wie auch der Kathodenstrom der Endröhre des Ansteuerverstärkers wurden an einem Zweikanaloszilloskop (Tektronix TDS 220) aufgenommen. Der Anodenstrom wurde über den Spannungsabfall an dem 10-Ohm-Widerstand in der Kathodenleitung der Endröhre gemessen. Der Anodenstrom wird wegen des Stromabflusses über das Schirmgitter der Endröhre zwar überschätzt, doch liegt der sich hierdurch ergebende Fehler in der Größenordnung von maximal 10 %. Zur Frequenzmessung wurde der im Tektronix-Oszilloskop vorhandene Frequenzzähler verwendet.

Die beiden niedrigsten Frequenzen von 10 bzw. 71 Hz resultierten offensichtlich aus der Elastizität der Lagerung des Betonquaders bzw. des Unterbaus. So handelte es sich bei der 10-Hz-Schwingung um eine Drehschwingung des Quaders um seinen Schwerpunkt. Diese Schwingung kam nur dann zustande, wenn der Quader nahe an seinem Schwerpunkt auf den dicht beieinander stehenden Lagerböcken aufgesetzt war. Die Schwingung bei 71 Hz entsprach einer linearen Auf- und Abwärtsbewegung des Quaders. Die Eigenfrequenzen dieser Schwingungen sind wesentlich durch die elastischen Eigenschaften der Lagerung bestimmt. Der Betonquader selbst verhält sich hier eher wie ein starrer, unelastischer Körper.

Bei den Schwingungen von 270 Hz und 722 Hz handelte es sich um echte

Biegeschwingungen des auf der Breitseite liegenden Quaders mit zwei bzw. drei Knotenpunkten. Diese Schwingungen traten bevorzugt, aber nicht ausschließlich dann auf, wenn der Quader unter den Knotenpunkten der jeweiligen Biegemode gelagert war. Charakteristisch ist hierbei auch, dass zum Umschalten zwischen den beiden Schwingungsmoden die Aufnehmer- oder Aktorspule umgepolt werden musste. Die Lage der Knotenpunkte ließ sich durch Betausten des schwingenden Betonquaders leicht ermitteln. Gegenstände, die nahe der Schwingungsbäuche auf den Betonquader gelegt wurden, konnten teilweise in so starke Vibration versetzt werden, dass sie auf der Quaderoberfläche entlangwanderten.

Die Schwingung bei 475 bzw. 488 Hz, die dann beobachtet wurden, wenn der Betonquader auf seiner Schmalseite gelagert war, entsprachen der Biegeschwingung mit zwei Knotenpunkten. Hier gilt in bezug auf die Untersuchung der Auslenkung das oben Gesagte.

Da der Elastizitätsmodul des Betons zunächst unbekannt war, wurde er wie in Abschnitt 4.2 schon beschrieben an Hand der 270-Hz-Schwingung bestimmt. Auf diesem Wert bauten auch die weiteren durchgeführten Berechnungen auf. Die zweite Resonanzmode konnte hierdurch mit recht guter Genauigkeit vorhergesagt werden. Die Approximation der Schwingung als einachsiger Spannungszustand ergab eine Frequenz von 744,5 Hz. Mit der FEM-Simulation des zweiachsigen Spannungszustandes wurde dagegen eine Frequenz von 725 errechnet, was einer Abweichung von nur 0,4 % vom realen Wert entspricht.

Bei der Berechnung der Eigenresonanz des auf seiner Schmalseite gelagerten Quaders waren die Abweichungen zum Meßwert von 475 Hz dagegen deutlich größer. Die Berechnung in der Approximation als einachsiger Spannungszustand ergab hier 540 Hz. Die FEM-Simulation dagegen ergab 518 Hz. Dies entspricht einer Abweichung von 9 % gegen den gemessenen Wert.

4.7 Messung der Modellparameter

4.7.1 Dynamische Masse

Die dynamischen Massen des Quaders für die drei erzeugten Biegemoden bei 270, 475 und 725 Hz wurden nach der in Gl. (14) beschriebenen Methode gemessen. Hierzu wurden auf die Oberseite des Betonquaders genau oberhalb des Permanentmagneten des Aktorwandlers verschiedene Feingewichte mit Massen zwischen 20 und 200 g gestellt und die Änderung der Resonanzfrequenz bestimmt. In Abbildung 11 ist die relative Frequenzverschiebung $\omega(\Delta m)/\omega_0$ als Funktion der Zusatzmasse Δm aufgetragen. Die Steigung der gezeigten

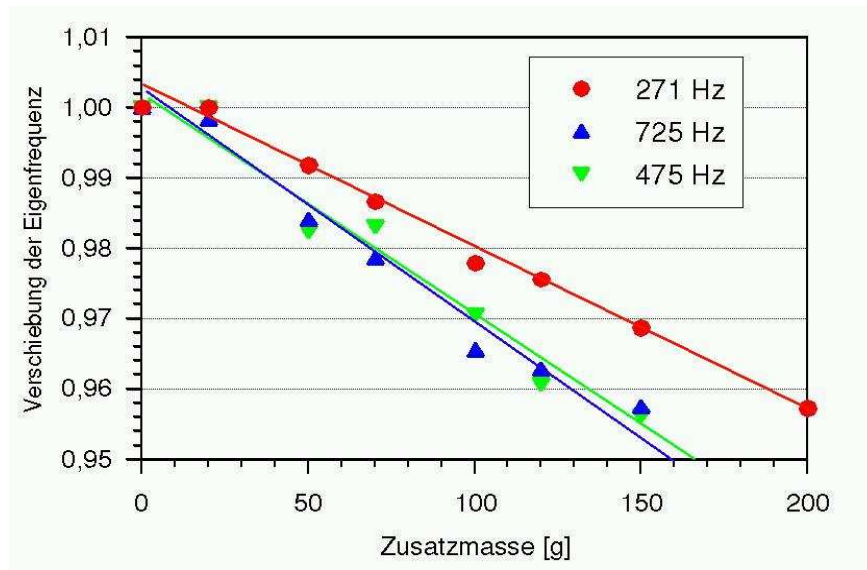


Abbildung 11: Verschiebung der Resonanzfrequenz als Funktion der auf dem Schwinger angebrachten Zusatzmassen.

Regressionsgeraden entspricht der reziproken dynamischen Masse m für die jeweilige Resonanzmode. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zusammengefaßt. Hier ist klar zu erkennen, dass die dynamischen Massen sämtlich deutlich kleiner sind als die tatsächliche Masse des Betonquaders, die bei 8 kg liegt. Die effektive Federkonstante D wurde an Hand von Gl. (15) berechnet.

Für die Biegeschwingungsmode bei 270 Hz wurde ferner untersucht, inwiefern die durch eine Zusatzmasse bedingte Frequenzänderung von der Position dieser Zusatzmasse abhängt. Hier ist zu erwarten, dass die größte Frequenzänderung dann auftritt, wenn die Zusatzmasse an einem Punkt maximaler Schwingungsamplitude befestigt wird. Hingegen sollte die Frequenzverschiebung Null sein, wenn die Zusatzmasse in einem Schwingungsknoten montiert wird. Dies wird durch das in Abbildung 12 gezeigte Resultat bestätigt. Bei diesem Experiment wurde ein Gewicht von 100 g an verschiedenen Punkten des Betonquaders aufgesetzt und der Quader in Eigenschwingung versetzt. Die Frequenzen wurden mit dem Frequenzzähler des Oszilloskops Tektronix TDS 220 auf etwa 0,3 Hz genau bestimmt. Man erkennt hier, dass die Frequenzabsenkung ungefähr zum Quadrat der Schwingungsamplitude proportional ist.

Resonanzfrequenz	$\Delta\omega/\omega\Delta m$	dynamische Masse m	Dämpfung κ	Federkonstante D
Hz	kg^{-1}	kg	Ns/m	$\text{N}/\mu\text{m}$
271	0,235	$4,25 \pm 0,3$	87 ± 8	12,3
475	0,313	$3,2 \pm 0,4$	232 ± 30	28,5
725	0,333	$3,0 \pm 0,4$	41 ± 8	62,3

Tabelle 5: Dynamische Massen m , Dämpfungsfaktoren κ und Federkonstanten D der verschiedenen Biegemoden.

4.7.2 Dämpfungskonstante

Tabelle 5 umfaßt auch die Werte der Dämpfungskonstante. Hierzu wurden zunächst die Wandlerkonstanten bestimmt, wobei insbesondere die Abstände der Permanentmagneten zu den Wandlerwindungen mittels Schiebelehre vermessen wurden. Die ermittelten Werte sowie die daraus berechneten Wandlerkonstanten sind in Tabelle 2 angegeben. Im nächsten Schritt wurde dann die kritische Steilheit des Verstärkers bestimmt, bei der die Eigenschwingungen gerade eben einsetzen. Mittels des Oszilloskops wurden für die kritische Einstellung dann die Signalspannung an der Aufnehmerspule sowie der Wechselstromanteil des Motorstroms gemessen. Das Verhältnis dieser beiden Werte ergibt die Steilheit. Die Berechnung der Dämpfung erfolgt dann nach der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Methode.

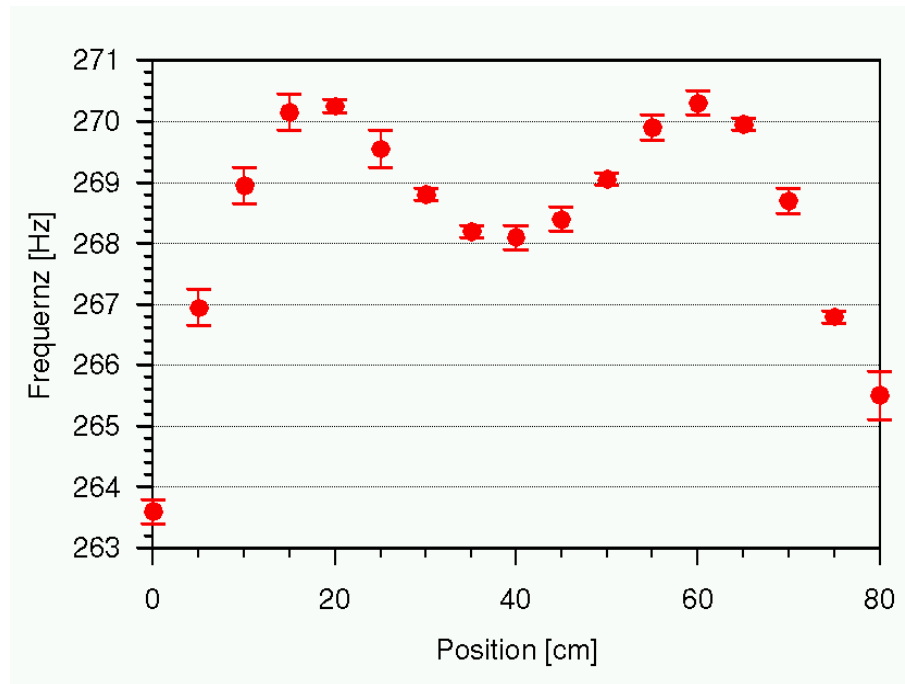


Abbildung 12: Abhängigkeit der Resonanzfrequenz für die Biegeschwingung um 270 Hz von der Position entlang des Betonquaders, an der eine Zusatzmasse von 100 g aufgesetzt wurde.

5 Ausblick

Der vorliegende Bericht dokumentiert die Berechnungen und Versuche zur Anregung von Eigenschwingungen in einem quaderförmigen Festkörper, bei welchem eine der Kanten deutlich länger ist als die beiden übrigen. Die niederfrequentesten Eigenschwingungen sind hierbei die Biegewellen mit Wellenvektor entlang der längsten Achse des Quaders. Gleichzeitig ergibt sich für diese Wellen ein recht niedriger Wert für die Kraft, die aufgewendet werden muss, um in den Schwingungsbäuchen der betrachteten Resonanzmode eine bestimmte Auslenkung zu erzielen. Dies bedeutet, dass der Faktor $D = \partial F / \partial s|_{v=0}$ klein und die Übertragungsfunktion $g(\omega_{\text{res}}) = \tau_r \omega_{\text{res}}^2 / D$ aus Gl. (19), welche die Kopplung an das elektrische System bestimmt, für die spezifische Eigenfrequenz ω_{res} hoch ist. Dies ist für die Ankopplung der Eigenschwingungen an einen magnetischen Wandler günstig.

Das Spektrum der Eigenfrequenzen ist für die hier betrachteten Schwinger naturgemäß recht begrenzt. Die Eigenfrequenzen stehen für den Biegeschwin-

ger in einem Frequenzverhältnis von ungefähr $3^2 : 5^2 : 7^2 : \dots$. Möchte man ein Frequenzspektrum erreichen, bei dem die Eigenfrequenzen dichter beieinander liegen, dann bietet sich die Verwendung von zweidimensionalen, d. h. zum Beispiel plattenförmigen Schwingern an. Für eine Einführung in die Theorie dieser Schwinger sei auf das schon zitierte Buch von Fletcher und Rossing verwiesen. Die grundsätzlichen Überlegungen für die Ankopplung an das elektrische System mittels magnetischen Wandlern bleiben hier gültig.